

Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_2 = 2$ și $b_3 = 4$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției f intersectează axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x+2} = 1 - x$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,0)$ și $C(a,a+2)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii \overline{OC} și \overline{AB} sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
- 5p** b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere întregi și $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a) \cdot X = A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea $A = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$.
- 5p** a) Arătați că numărul $a = 2 \circ 4$ este întreg.
- 5p** b) Arătați că $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$.
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ \circ ” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy .
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.
2. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x)dx = 6$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^n f(x)e^{-x} dx < 1$, pentru orice număr natural nenul n .