Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}>\frac{3}{4}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+18$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f\circ f$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3-x}-2^{2-x}+2^{5-x}=9$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,1)$ și $B(-2,5)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație $y=2x+3$.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, știind că $\operatorname{tg} C=1$ și că triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 3.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right)=10$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural m, $m\geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy-4}{x+y-4}$.

5p **a)** Arătați că $8\circ 8=5$.

5p **b)** Arătați că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x\in M$ și n este număr natural, $n\geq 2$, astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=2^n-\frac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x-3)-2\ln\left(x^2-9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\left((x-3)f(x)\right)=0$.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\frac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\frac{5}{8}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=4(1-\ln 3)$.

5p **c)** Determinați $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, pentru care $\displaystyle\int_a^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}\,dx=\sqrt{3}-1$.