Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=5$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2mx-6$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+12\right)=\log_3 27$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(-1,3)$ și $C(1,m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în B.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{23\pi}{3}=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(1+a)x+y+z=0\\ x+(1+b)y+z=0\\ x+y+(1+c)z=0\end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale nenule.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-2,0,2)\right)=-4$.

5p **b)** Arătați că, dacă $abc+ab+ac+bc\neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este întreg.

2. Pe mulțimea $G=(0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{xy-x-y+2}$ și se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right)*f\left(\frac{2}{3}\right)*f\left(\frac{3}{4}\right)*\ldots*f\left(\frac{2020}{2021}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\ln x-x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe $(0,1)$.

5p **c)** Demonstrați că $2\ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 1$.

5p **b)** Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $I_n \le \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n.