

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați partea întreagă a numărului $a = \frac{4}{\sqrt{2}}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m , știind că axa Ox este tangentă la graficul funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{(x-1)(x+2)} = (x+2)\sqrt{x-1}$.
- 5p** 4. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, știind că mulțimea $\{3, 4, 5, \dots, n+2\}$ are exact 55 de submulțimi cu 2 elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 , de ecuații $2x - y + 1 = 0$, respectiv $x + y + 2 = 0$. Determinați ecuația dreptei d care este perpendiculară pe dreapta d_2 și trece prin punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 .
- 5p** 6. Arătați că $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m, x) = \begin{pmatrix} 2 & -x & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 3 & -2 & x \end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4, 2)) = 0$.
- 5p** b) Determinați rangul matricei $A(2, 1)$.
- 5p** c) Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n, p) pentru care $\det(A(3, n)) = \det(A(3, p))$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = \frac{xy}{3} - x - y + 6$.
- 5p** a) Arătați că $(-1) * 3 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $x * (y + z - 3) = (x * y) + (x * z) - 3$, pentru orice numere reale x , y și z .
- 5p** c) Determinați numerele reale x , $x \neq 3$ pentru care $(x * (x + x' - 3)) + (x' * (2x - 3)) = 42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - ax$, unde a este număr real.
- 5p** a) Pentru $a = 0$, arătați că $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = \sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f , este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$.

5p a) Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x} dx = 20$.

5p b) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^n(x) dx = 0$.