Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a=2\sqrt{2}$	**2p**
	Cum $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$, deci $2<a<3$, obținem că $[a]=2$	**3p**
2.	Axa Ox este tangentă la graficul funcției $f \Rightarrow \Delta=0$	**2p**
	$m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$	**3p**
3.	$(x-1)(x+2)=(x-1)(x+2)^2 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1)=0$	**2p**
	$x=-2$, care nu convine; $x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**3p**
4.	$C_n^2=55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=55 \Rightarrow n^2-n-110=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=11$	**2p**
5.	Punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 este punctul $M(-1,-1)$	**2p**
	$m_{d_2}=-1$ și, cum $m_d\cdot m_{d_2}=-1$, obținem $m_d=1$, deci ecuația dreptei d este $y=x$	**3p**
6.	$\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(4,2)=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(4,2))=\begin{vmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=16+(-2)+(-18)-12-(-12)-(-4)=0$	**3p**
b)	$A(2,1)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&3\\3&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2,1))=0\Rightarrow \operatorname{rang}(A(2,1))\leq 2$	**3p**
	Cum $\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq 0$, obținem că rangul matricei $A(2,1)$ este egal cu 2	**2p**
c)	$n^2-3n+1=p^2-3p+1 \Leftrightarrow (n-p)(n+p-3)=0$	**2p**
	Cum n și p sunt numere naturale nenule și distincte, obținem $n+p=3$, iar perechile sunt $(1,2)$ și $(2,1)$	**3p**
2.a)	$(-1)*3=\frac{-3}{3}-(-1)-3+6=$	**3p**
	$=-1+1-3+6=3$	**2p**

b)	$x*(y+z-3)=\frac{x(y+z-3)}{3}-x-(y+z-3)+6=\frac{xy+xz}{3}-2x-y-z+9=$	**2p**
	$=\frac{xy}{3}-x-y+6+\frac{xz}{3}-x-z+6-3=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
c)	$x*6=6*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”, de unde obținem că $x*x'=x'*x=6$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”	**2p**
	Deoarece $2x-3=x+x-3$ și $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, obținem $(x*x)+(x*x')-3+(x'*x)+(x'*x)-3=42 \Leftrightarrow (x*x)+6-3+6+6-3=42$, deci $x*x=30 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2x+6=30$, de unde obținem $x=-6$ sau $x=12$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f(x)=\sqrt{x^2+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot\left(x^2+2\right)'=$	**3p**
	$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'\left(\sqrt{2}\right)=0$	**2p**
	Cum $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-a$, pentru orice număr real a, obținem că $\frac{\sqrt{2}}{2}-a=0$, deci $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-ax}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-a\right)}{x}=1-a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(1-a)x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$, deci, pentru orice număr real a, dreapta de ecuație $y=(1-a)x$ este asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
2.a)	$\int_1^3\frac{xf(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^3 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{81-1}{4}=20$	**2p**
b)	$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left.\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x\right\|_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1}{x^2+1}dx=2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}1dx=$	**3p**
	$=\frac{5\pi}{12}-\left.\frac{1}{2}x\right\|_1^{\sqrt{3}}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in[0,1]$, $0\le x^{2n}\le 1$ și $0\le\operatorname{arctg}x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\operatorname{arctg}^n x\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$, de unde obținem că $0\le\int_0^1 f^n(x)dx\le\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}\right)^n dx=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx=0$	**2p**