Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(1+i)^2-2(1+i)+2=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(1,2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,4)$, $N(0,1)$ și $P(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P şi este paralelă cu dreapta MN.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în C. Arătați că $\operatorname{tg} B=\dfrac{1}{\operatorname{tg} A}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

5p **a)** Arătați că $2*0=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\le b$, atunci $a*b=b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)\,dx=2$.

5p	**b)** Arătați că $\int_1^2 g(x)\,dx = \ln\frac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.
5p	**c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.