Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+7$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-7$. Calculați $(f\circ g)(7)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ și $D(5,6)$. Demonstraţi că punctele B, D și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\sin x-\cos x)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a & 2^a\\ -2^a & 1-2^a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

5p **c)** Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Arătați că $m=n=1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2+y^2+x+y$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*(-1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2*x^2\leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=18$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^3 x f(x)\,dx=4+\ln 5$.

5p **c)** Demonstraţi că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.