

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M\_mate-info$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 4**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{2021-\sqrt{2}+2021+\sqrt{2}}{2} =$ $= \frac{2 \cdot 2021}{2} = 2021$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(1) = m \Leftrightarrow 1 - 3 + 1 = m$ $m = -1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$\log_3 \left( (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) \right) = 2$ , deci $(\sqrt{x})^2 - 9 = 3^2$ $x - 9 = 9$ , deci $x = 18$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	O mulțime cu $n$ elemente are $2^n$ submulțimi $2^n = 16$ , deci $n = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5.</b>	$MNQP$ este paralelogram, deci segmentele $MQ$ și $PN$ au același mijloc Coordonatele punctului $Q$ sunt $x = 11$ și $y = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	În $\triangle ABC$ , $2 \sin A \cdot \cos A \cdot \cos A = \sin A$ , deci $\cos^2 A = \frac{1}{2}$ Cum unghiul $A$ este ascuțit, obținem $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , deci $A = \frac{\pi}{4}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{vmatrix} = a$ , pentru orice $a \in (0, +\infty)$ $\det(A(a)) \neq 0$ , pentru orice $a \in (0, +\infty)$ , deci matricea $A(a)$ este inversabilă	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$(A(a))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -1 - \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , pentru orice $a \in (0, +\infty)$ $A(a) + (A(a))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a + \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a) + (A(a))^{-1}) = 4 \left( a + \frac{1}{a} \right)$ și, cum $a + \frac{1}{a} \geq 2$ , obținem că $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$ , pentru orice $a \in (0, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>2.a)</b>	Pentru $m=1$ , obținem $x \circ y = xy - (x+y) + 2$ , deci $2 \circ 2 = 2 \cdot 2 - (2+2) + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$2 \circ 1 = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - m(2+1) + m(m+1) = 5 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$ și, cum $m \in (0, +\infty) \Rightarrow m = 3$ $2 \circ 5 = 2 \cdot 5 - 3(2+5) + 3 \cdot 4 = 10 - 21 + 12 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$-m^2 x^5 - m(mx^3 - mx^2) + m^2 + m = m \Leftrightarrow m^2(x^5 + x^3 - x^2 - 1) = 0$ Cum $m \in (0, +\infty)$ , obținem $x^3(x^2 + 1) - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^3 - 1) = 0$ , deci $x = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} = \frac{4x^4 - 4}{x} = \frac{4(x^4 - 1)}{x} = \frac{4(x^2 + 1)(x+1)(x-1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (0, 1]$ , deci $f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , deci $f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Cum $f(1) = -1$ , $f$ este continuă, $f$ este strict descrescătoare pe $(0, 1)$ și $f$ este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ , obținem că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \int_0^1 (x^4 + 1 + 2x) dx = \left( \frac{x^5}{5} + x + x^2 \right) \Big _0^1 = \frac{1}{5} + 1 + 1 = \frac{11}{5}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2x}{x^4 + 1} \right) = 1$ Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $F$ are panta egală cu 1	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$G(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left( 1 + \frac{2t}{t^4 + 1} \right) dt = \left( t + \arctg(t^2) \right) \Big _0^x = x + \arctg(x^2), x \in \mathbb{R}$ $\int_0^1 xG(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x \arctg(x^2)) dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' \arctg(x^2) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x^2 \arctg(x^2) \Big _0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) \Big _0^1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>