

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $3(4-i) + 3i(1+i) = 9$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. Calculați $(f \circ f)(2)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 2x + 4) = 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctele O , A și B sunt coliniare.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1,1)) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x| \neq |y|$.
- 5p** c) Determinați perechile (m,n) , de numere întregi, pentru care $A(m,n) \cdot A(-m,n) = I_2$.
2. Pe mulțimea $A = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 4^{xy} - (1 - x - y)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 0 = 2$.
- 5p** b) Arătați că $x \circ \frac{1}{x} \geq 5$, pentru orice $x \in A$, $x \neq 0$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m \circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $x^3 \geq 3 \ln x + 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + e^x) dx = \frac{e^2 + 1}{e}$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x) dx \geq -\frac{2a}{e}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.