Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 4 + 2\cdot 5 =$	**3p**
	$= 4 + 10 = 14$	**2p**
2.	$f(0) = -1$	**2p**
	$f(1) = -1$, deci $f(0) = f(1)$	**3p**
3.	$3x + 4 = 16$	**3p**
	$x = 4$, care convine	**2p**
4.	$x + \frac{25}{100}\cdot x = 350$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire	**3p**
	Prețul produsului înainte de scumpire este 280 de lei	**2p**
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AB, deci $\frac{-4+a}{2} = 0$ și $\frac{1+b}{2} = 0$	**3p**
	$a = 4$, $b = -1$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2}$	**2p**
	$\frac{AB^2}{2} = 8 \Leftrightarrow AB^2 = 16$, de unde obținem $AB = 4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 1 - (-2)\cdot(-1) =$	**3p**
	$= 5 - 2 = 3$	**2p**
b)	$B(2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(6) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3B(2) + B(6) = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 4\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4B(3)$	**2p**
c)	$\left(B(-x) - B(x)\right)\cdot\left(B(-x) + B(x)\right) = \begin{pmatrix} -2x & 4x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & -8x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $A + B(3) = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obținem $x = 1$	**2p**
2.a)	$3 \circ 4 = 3\cdot 3 + 4\cdot 4 - 25 =$	**3p**
	$= 25 - 25 = 0$	**2p**

b)	$(2x)\circ x=10x-25$, pentru orice număr real x $10x-25=5$, de unde obținem $x=3$	**3p** **2p**
c)	$m^2\circ 1=3m^2-21$ și $1\circ m^2=4m^2-22$, pentru orice număr întreg m $3m^2-21\geq 4m^2-22\Leftrightarrow -m^2+1\geq 0$, deci $m\in[-1,1]$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=-1$ sau $m=0$ sau $m=1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2(3x+1)-2x\cdot 3}{(3x+1)^2}=$ $=\frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}=\frac{2}{(3x+1)^2}$, $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$ Dreapta de ecuație $y=\frac{2}{3}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=-\frac{12}{(3x+1)^3}$, $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$, deci funcția f este concavă	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^4\left(f(x)-\ln x+1\right)dx=\int_1^4 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^4=$ $=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$	**3p** **2p**
b)	$\int_2^4\frac{x}{f(x)-\ln x}dx=\int_2^4\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}dx=\left.\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)\right\|_2^4=$ $=\frac{1}{2}\ln 15-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln 5$	**3p** **2p**
c)	$\int_1^a\frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^a\left(1+\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^a 1dx+\int_1^a\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx-\int_1^a\frac{1}{x^2}dx=$ $=x\Big\|_1^a-\frac{1}{x}\ln x\Big\|_1^a+\int_1^a\frac{1}{x^2}dx-\int_1^a\frac{1}{x^2}dx=a-1-\frac{\ln a}{a}$, pentru orice $a\in(1,+\infty)$ $a-1-\frac{\ln a}{a}=\frac{a-\ln a}{a}$, de unde obținem $a=2$, care convine	**3p** **2p**