

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Model

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$N = \log_2 \frac{24}{12} + 3 = \log_2 2 + 3 =$ $= 1 + 3 = 4 = 2^2$	3p 2p
2.	$f(a) = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$ $a = 1$	3p 2p
3.	$x^2 - 2x - 2 = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = x^2 - 4x + 4$ $x = 3$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele divizibile cu 9 din mulțimea $A$ sunt $6!$ , $7!$ , $8!$ , $9!$ și $10!$ , deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{EB} + \overline{FC} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{FD} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{DC}$ $2(\overline{EB} + \overline{FC}) = 2\overline{AB} + 2\overline{DC} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC}$	2p 3p
6.	$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x =$ $= 2 \sin 2x = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right)$ , pentru orice număr real $x$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	2p 3p
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - x + 1$ , pentru orice număr real $x$ Cum $\det(A(x)) \neq 0$ pentru orice număr real $x$ , obținem că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr real $x$	3p 2p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cum $A(2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = (A(1))^{-1} \cdot A(2) \cdot (A(1))^{-1}$ , obținem $X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$\sqrt{2} \circ 0 = \sqrt{2} \cdot 0 - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 0 - 1) + 2 =$ $= -2 + \sqrt{2} + 2 = \sqrt{2}$	3p 2p

<b>b)</b>	$x^2 - 2 - \sqrt{2}(x - \sqrt{2} + x + \sqrt{2} - 1) + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ $x = \sqrt{2} - 1$ sau $x = \sqrt{2} + 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$e = \sqrt{2} + 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”, deci $a$ este simetrizabil în raport cu „ $\circ$ ” dacă și numai dacă există $a'$ , astfel încât $a \circ a' = a' \circ a = \sqrt{2} + 1$ $aa' - \sqrt{2}(a + a' - 1) + 2 = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow aa' + 1 - \sqrt{2}(a + a') = 0$ deci, dacă $a$ și $a'$ sunt numere raționale, obținem $a + a' = 0$ și $aa' = -1$ , deci $a = -1$ sau $a = 1$ , care convin	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \left(x - \ln(x^2 + 1)\right)' = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x =$ $= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}, x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $A$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = \frac{1}{5}x + 1$ , deci $f'(n) = \frac{1}{5}$ $5(n-1)^2 = n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 - 5n + 2 = 0$ și, cum $n$ este număr natural nenul, obținem $n = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (0, 1) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0, 1)$ , $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ și, cum $f$ este continuă în $x = 1$ , obținem că $f$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ , deci injectivă Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și $f$ este continuă și strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ , obținem că $f$ este surjectivă, deci bijectivă	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^e x^2 \left(f(x) + \frac{2 \ln x}{x^3}\right) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _1^e =$ $= \ln e - \ln 1 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^{\sqrt{5}} x \cdot f(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{5}} (x^2 + 3)' \cdot f(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} F(x^2 + 3) \Big _1^{\sqrt{5}} =$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 8}{64} - \frac{\ln 4}{16}\right) = -\frac{5 \ln 2}{128}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_e^{e^2} x F(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big _e^{e^2} = \frac{\ln^2(e^2) - \ln^2 e}{2} = \frac{3}{2}$ $\frac{a^2 - 1}{2} = \frac{3}{2}$ , de unde obținem $a = -2$ sau $a = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>