

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală - 26 februarie 2022

CLASA a X-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Dacă $x \in \mathbb{R}$ și ${}^{8x-1}\sqrt{16x} = {}^{4-4x}\sqrt{8x}$, stabiliți care dintre următoarele numere este pătratul unui număr natural:

- A $2x^2$ B $8x^3$ C $4x^4$ D $6x^2$ E $12x^3$

2. Știind că $a = \log_3 120$ și $b = \log_3 2$, numărul $c = \log_3 90$ este egal cu:

- A $1 + a - 2b$ B $a - 2b - 1$ C $2 + a - b$ D $1 - a - 2b$ E $1 + a - b$

3. Se consideră expresia $E(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ și numărul $w = 2 - \sqrt[3]{2}$. Numărul $E(w)$ este egal cu:

- A 6 B -4 C $8\sqrt[3]{2}$ D $\sqrt[3]{16}$ E 7

4. Se consideră numerele $x_k = (\sqrt[5]{4})^{80-k} \cdot (\sqrt[3]{2})^k$, $k = \overline{0, 80}$. Numărul numerelor raționale, din mulțimea $M = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{80}\}$, este egal cu:

- A 6 B 38 C 39 D 7 E 12

5. Partea întreagă a numărului $a = \log_2 5 + \log_{25} 256$ este egală cu:

- A 2 B 3 C 4 D 5 E 6

6. Se consideră o funcție injectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există un număr real a astfel încât: $f(x) \cdot f(1-x) = f(a \cdot x - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Numărul a este egal cu:

- A -2 B -1 C 0 D 1 E $\frac{1}{2}$

7. (SGM 9/2021, enunț modificat/adaptat) Cel mai mic număr întreg m pentru care inegalitatea $4^x + (m-1) \cdot 2^{x+1} + m - 1 \geq 0$ este adevărată pentru orice număr real x , este egal cu:

- A 0 B 1 C 2 D -2 E -1

8. Ordinea crescătoare a numerelor $m = \sqrt[6]{6400}$, $n = 5 \cdot \sqrt[3]{3}$, $p = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$ este:

- A p, m, n B m, n, p C m, p, n D p, n, m E n, p, m

9. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$, $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, este surjectivă, atunci numărul $c = 3a + 2b$ este egal cu:

- A 2 B 3 C 0 D 4 E 1

10. Dacă $a, b \in (0, +\infty)$, $a \neq b$, iar $2 + \log_2 a + \log_2 b = \log_2(2a^2 + ab + b^2)$, atunci numărul $c = \frac{a}{b}$ este egal cu:

- A $\frac{1}{3}$ B $\frac{3}{2}$ C 3 D 2 E $\frac{1}{2}$

11. (SGM 11/2021, enunț modificat) Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{5+x} - \sqrt[3]{x+1} = 2$ este egală cu:

- A -6 B $-1 - 2\sqrt{17}$ C $1 + 2\sqrt{17}$ D 6 E 10

12. (SGM 11/2021, enunț modificat) Dacă $a > 1$ este număr real astfel încât $a^4 + \frac{1}{a^4} = \frac{6817}{1296}$, atunci numărul $b = a - \frac{1}{a}$ este egal cu:

- A $\frac{1}{6}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{7}{6}$ D $\frac{5}{6}$ E $\frac{7}{12}$

13. (SGM 11/2021) Dacă (x_1, x_2, x_3) este o soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \log_3(1+x_1) = \log_7(3+x_2+x_3) \\ \log_3(1+x_2) = \log_7(3+x_3+x_1) \\ \log_3(1+x_3) = \log_7(3+x_2+x_1) \end{cases}$$

pentru care $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, atunci numărul $T = x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3$ aparține intervalului:

A $\left(-\frac{8}{3}, \frac{1}{7}\right)$ B $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{7}\right)$ C $\left(\frac{1}{7}, \frac{7}{3}\right)$ D $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{7}\right)$ E $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{1}{3}\right)$

14. (SGM 10/2021, enunț modificat) Dacă $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \leq b$, este soluție a sistemului de

ecuații $\begin{cases} 9^x + 7x = 5y + 4 \\ 9^y + 7y = 5x + 4 \end{cases}$, atunci numărul $M = \frac{a+b}{a \cdot b}$ este egal cu:

A $\frac{1}{2}$ B 2 C $\frac{1}{4}$ D 4 E 1

15. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $4 + 4^x \cdot \log_2 x = 2^{2x+1} + \log_2(x^2)$ este egal cu:

A $\frac{1}{2}$ B 2 C $\frac{9}{2}$ D 8 E 4

16. Cel mai mare număr întreg k , pentru care inegalitatea $\log_{\frac{k-1}{k+1}}(x^2 + 3) \geq 1$ este adevărată pentru orice număr real x , este egal cu:

A -4 B -3 C -2 D 0 E 3

17. Dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$ și $a + b + c = 4$, atunci valoarea minimă a expresiei

$E = \frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a}$ este egală cu:

A $\frac{3}{2}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{4}{3}$ D $\frac{9}{8}$ E $\frac{9}{16}$

18. (GM 6-7-8/2021) Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare cu proprietatea că $f(f(x)) + f(x) = 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci numărul $P = f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) \cdot f\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{2022}{2021}\right)$ este egal cu:

A $1011 \cdot 2023$ B 1011 C $\frac{1}{2021!}$ D $\frac{1}{2022!}$ E 2022!

19. Funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow (7, +\infty), f(x) = 81^x + 9^x + 7$, are inversa g . Numărul $s = g(19) + g(97)$ este egal cu:

A -1 B $\frac{1}{2}$ C $-\frac{1}{4}$ D $\frac{3}{2}$ E $\frac{3}{4}$

20. Se consideră mulțimea $\mathcal{S}(a) = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}\right\}$. Numărul elementelor mulțimii $\mathcal{D} = \mathcal{S}(2022) \setminus \mathcal{S}(2048)$ este egal cu:

A 27 B 26 C 0 D 1026 E 13

21. Numărul elementelor mulțimii $\mathcal{A} = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 + \log_2(n+1) = n + \cos \frac{n\pi}{6}\right\}$ este egal cu:

A 1 B 2 C 3 D 4 E 6

22. Se consideră funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin:

$$f_1(x) = 2^x - 1, \quad f_2(x) = 2022 + x^{2021}, \quad f_3(x) = \log_2(1 + x^4), \quad f_4(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 1 \\ 4^x, & x > 1 \end{cases}$$

Dintre cele considerate, funcțiile surjective sunt:

A f_1, f_3 B f_2, f_4 C f_1, f_4 D f_2, f_3 E f_1, f_2

23. Se consideră funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin:

$$f_1(x) = 2^x - 1, \quad f_2(x) = 2022 + x^{2021}, \quad f_3(x) = \log_2(1 + x^4), \quad f_4(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 1 \\ 4^x, & x > 1 \end{cases}$$

Dintre cele considerate, funcțiile injective sunt:

- A** f_1, f_2, f_4 **B** f_1, f_3, f_4 **C** f_1, f_2, f_3 **D** doar f_2, f_3 **E** doar f_1, f_3

24. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 2}$ și mulțimea $T = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 4 \right\}$. Numărul $w = \sum_{x \in T} \frac{1}{x^2}$ este egal cu:

- A** $\frac{5}{2}$ **B** 2 **C** $\frac{5}{4}$ **D** $\frac{1}{2}$ **E** $\frac{3}{4}$



MINISTERUL EDUCAȚIEI



Societatea de Științe Matematice
din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 26 februarie 2022
CLASA a X-a

Grila de răspunsuri

1. B
2. A
3. A
4. A
5. C
6. C
7. B
8. A
9. E
10. E
11. E
12. D
13. A
14. D
15. B
16. C
17. D
18. C
19. D
20. B
21. B
22. B
23. A
24. C