

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 26 februarie 2022

CLASA a XI-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = 1 + i$. Valoarea expresiei $\det(A^3) + \det(iA)$ este:
A 0 B $1 - i$ C $-1 + i$ D $3 - 3i$ E $-2 + i$

2. Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o soluție a ecuației $x^5 = 1$, atunci determinantul $\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & 1+z \end{vmatrix}$ are valoarea:
A -1 B 1 C 0 D -4 E 4

3. Considerăm permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul soluțiilor ecuației $x^2 = \sigma$, $x \in S_4$, este egal cu:
A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

4. Suma numerelor reale a și b pentru care $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax) = b$ este egală cu:
A 1 B $-\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{3}{2}$ E -1

5. Mai jos sunt enumerate cinci enunțuri referitoare la șiruri de numere reale.

- A. Orice șir convergent este monoton și mărginit.
- B. Orice șir monoton are limită.
- C. Orice șir descrescător este mărginit superior.
- D. Orice șir mărginit conține un subșir convergent.
- E. Orice șir conține un subșir monoton.

Care dintre aceste afirmații este falsă?

A B C D E

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei A^{2022} este egală cu:
A -8088 B -6063 C 0 D 1011 E 6066

7. Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ este egală cu:
A $\frac{1}{e^2}$ B $\frac{1}{e}$ C 1 D \sqrt{e} E e

Problemele 8 și 9 se referă la următorul enunț:

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + 2^{-x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

8. Atunci:

A $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ B $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. C $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.
D $(x_n)_{n \geq 1}$ nu are limită. E $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este monoton

9. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n}$ este egală cu:A e B $\ln 2$ C $\frac{1}{e}$ D $\frac{1}{\ln 2}$ E $\frac{1}{e \ln 2}$

10. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este definit astfel: $a_1 = \sqrt{8}$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{2}{3^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

- A $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ B $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ C $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ D $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ E $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

11. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = \operatorname{Tr}(A) = 1$ și $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Numărul elementelor mulțimii M este:

- A 1 B 2 C 3 D 6 E ∞

12. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A) = 5$ și $\operatorname{Tr}(A) = 6$. Notăm $M = \{a \in \mathbb{R} \mid \det(A^4 + aA^2 + 25I_2) = 25\}$. Atunci:

- A $M = \{25\}$ B $M = \{-27, -25\}$ C $M = \{0\}$ D $M = \{-10, 9\}$ E $M = \{-25\}$

13. Valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 3 & 3 \\ x & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, este:

- A 0 B $\frac{1}{2}$ C 1 D 2 E 8

Problemele 14-15 se referă la următorul enunț:

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Atunci A^{2022} este:

- A I_2 B O_2 C $3A$ D $2021A$ E $4^{2021}A$

15. Numărul matricelor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^{2022} = A$ este egal cu:

- A 1011 B 2022 C 2 D 0 E 1

16. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot A^T = I_3$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A . Atunci:

- A $\operatorname{Tr}(A) = 3$ B $\det(A) = 1$ C $A = A^T$ D $\det(A^2 - I_3) = 0$ E $\det(A - I_3) = 0$

17. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât pe diagonala principală avem zerouri (deci $a_{ii} = 0$ pentru $i \in \{1, \dots, 4\}$), iar în rest numere reale nenule. Numărul termenilor nenuli ai sumei

$s = \sum_{\sigma \in S_4} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdot a_{4\sigma(4)}$ este:

- A 9 B 23 C 12 D 8 E 7

18. Definim șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ prin $a_n = [\sqrt{2} + \{n\sqrt{2}\}]$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real x . Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ este:

- A $\sqrt{2}$ B $2\sqrt{2}$ C 0 D $1 + \sqrt{2}$ E ∞

19. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1} \cdot x_{n-1}^5 = x_n^6$, cu $x_0 = 4$ și $x_1 = 2$. Limita șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ este:

- A ∞ B 0 C 1 D 2 E 5

20. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB + 5I_n = 3A + 2B$. Câte dintre următoarele patru afirmații sunt adevărate?

- (1) $A - 2I_n$ este inversabilă (2) $B - 3I_n$ este inversabilă
 (3) $AB = BA$ (4) Ecuația $AX = 2X$ are soluții nenule în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

21. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este definit prin $x_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \sqrt{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sqrt{1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

Atunci:

A $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ **B** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$ **C** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ **D** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ **E** $(x_n)_{n \geq 1}$ nu are limită

Problemele 22-23 se referă la următorul enunț:

Considerăm șirul $(e_n)_{n \geq 1}$ definit prin $e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Limita șirului $x_n = \frac{n(\sqrt[n]{e_n} - 1)}{\ln e_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este:

A 0 **B** $\frac{1}{e}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1 **E** e

23. Limita șirului $y_n = \sqrt[n]{n!} (e^{\sqrt[n]{e_n} - 1} - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este:

A 0 **B** $\frac{1}{e}$ **C** 1 **D** e **E** ∞

24. Fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \right)^n$. Atunci

A $L = 0$ **B** $L = 1$ **C** $L = e$ **D** $L = e^2$ **E** $L = \infty$



MINISTERUL EDUCAȚIEI



Societatea de Științe Matematice
din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 26 februarie 2022
CLASA a XI-a

Grila de răspunsuri

1. C
2. A
3. A
4. C
5. A
6. B
7. E
8. A
9. D
10. D
11. D
12. B
13. C
14. E
15. C
16. D
17. A
18. A
19. B
20. D
21. B
22. D
23. B
24. E