



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 26 februarie 2022

CLASA a XII-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie operația \perp definită prin $x \perp y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Această operație nu este lege de compoziție pe:

- A. \mathbb{R} .
- B. $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.
- C. $(6, \infty)$.
- D. $(-\infty, 6)$.
- E. \mathbb{Q} .

2. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b)e^x$ este o primitivă a funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (3x + 2)e^x$ dacă:

- A. $a = 3, b = 1$.
- B. $a = 3, b = -1$.
- C. $a = 3, b = 0$.
- D. $a = 3, b = 2$.
- E. $a = 3, b = -2$.

3. Fie legea asociativă $*$ definită pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ prin $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Atunci $\frac{7}{2} * \frac{11}{3} * \frac{15}{4} * \frac{19}{5} * \frac{23}{6}$ este egal cu:

- A. $\frac{27}{7}$.
- B. $\frac{19}{6}$.
- C. $\frac{1}{6}$.
- D. $\frac{7}{2}$.
- E. 3.

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f'(0) = 2$. Notăm cu F o primitivă a lui f . Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + F(-x) - 2F(0)}{x^2}$ este egală cu:

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. -1.
- E. -2.

5. Pe \mathbb{Z}_8 definim legea \circ prin $a \circ b = ab + a + b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_8$. Numărul soluțiilor ecuației $x \circ x = \widehat{7}$ este:

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 4.
- E. 8.

6. Fie funcția $f : [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x (t-1) \ln(t) dt$. Atunci:

- A. $x = 1$ este punct de minim al funcției f .
- B. $x = 1$ este punct de maxim al funcției f .
- C. f este descrescătoare pe $[\frac{1}{2}, \infty)$.
- D. f este crescătoare pe $[\frac{1}{2}, \infty)$.
- E. Toate răspunsurile anterioare sunt false.

7. Pe $(0, \infty)$ definim legea de compoziție \perp prin $u \perp v = u\sqrt{1+v^2} + v\sqrt{1+u^2}$, pentru orice $u, v \in (0, \infty)$. Valoarea numărului real α , pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x \perp x) - \alpha x^2)$ există și este finită, este egală cu:

- A. 1.
- B. 2.
- C. 4.
- D. 8.
- E. Alt răspuns.

8. Fie mulțimea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ admite primitive pe } \mathbb{R}\}$. Care dintre următoarele enunțuri este fals?

- A. Pentru orice $g, h \in \mathcal{F}$ avem $g + h \in \mathcal{F}$.
- B. Pentru orice $g, h \in \mathcal{F}$ avem $g - h \in \mathcal{F}$.
- C. Pentru orice $g, h \in \mathcal{F}$ avem $gh \in \mathcal{F}$.
- D. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și $g \in \mathcal{F}$ avem $\alpha g \in \mathcal{F}$.
- E. \mathcal{F} este grup în raport cu operația de adunare a funcțiilor.

9. Pe \mathbb{R} definim legea asociativă $*$ prin $a * b = 3(a-2)(b-2) + 2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Pentru un număr real α definim șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ prin relația $x_n = \underbrace{\alpha * \alpha * \dots * \alpha}_{n \text{ de } \alpha}$. Mulțimea tuturor valorilor posibile ale numărului α pentru care șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este mărginit este:

- A. \emptyset .
- B. $\{2\}$.
- C. $\{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$.
- D. $(\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$.
- E. $[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}]$.

10. Valoarea integralei $I = \int_0^1 (x \cos(x) + \sin(x)) dx$ este:

- A. 0.
- B. 1.
- C. $\cos(1)$.
- D. $\sin(1)$.
- E. $\sin(1) + \cos(1)$.

11. Cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $\widehat{2} \cdot \widehat{7} \cdot \widehat{12} \cdot \dots \cdot \widehat{(5n+2)} = \widehat{0}$ în \mathbb{Z}_{2022} , este:

- A. 1011.
- B. 37.
- C. 337.
- D. 67.
- E. 57.

12. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară și $a \in (0, \infty)$ astfel încât $f(a) \neq 0$. Fie F o primitivă a funcției f cu proprietatea $F(a) = F(-a) = 0$. Atunci $\int_{-a}^a F(t) dt$ este egală cu:

- A. a .
- B. $-f(a)$.
- C. $-a$.
- D. $f(-a)$.
- E. 0.

13. Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e . Se știe că $x^2 = e$, pentru orice $x \in G$. Câte morfisme injective $f : G \rightarrow G$ satisfac relația $f(f(x)) \cdot f(x) = e$, pentru orice $x \in G$?

- A. Niciunul.
- B. Exact unul.
- C. Exact două.
- D. Un număr finit mai mare sau egal decât 3.
- E. O infinitate.

14. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă și crescătoare cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$. Fie F o primitivă a lui f . Atunci despre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n-1)}$ putem spune că:

- A. Nu există.
- B. Este egală cu 0.
- C. Este egală cu 1.
- D. Este egală cu $+\infty$.
- E. Este egală cu 2.

15. Numărul total de valori posibile ale elementului $a \in \mathbb{Z}_{36}$, pentru care funcția $f : \mathbb{Z}_{36} \rightarrow \mathbb{Z}_{36}$, $f(x) = ax$ este surjectivă, este egal cu:

- A. 36.
- B. 18.
- C. 12.
- D. 9.
- E. 4.

16. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ prin $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^n dx$. Valoarea lui n , pentru care are loc egalitatea $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{2022}$, este:

- A. 2023.
- B. 2022.
- C. 2021.
- D. 2020.
- E. 2019.

17. Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e . Fie $H \neq G$ o submulțime nevidă a lui G cu proprietatea că oricare ar fi $a \in H$ și $b \in G \setminus H$ avem $ab \in H$. Considerăm enunțurile:

E1: Pentru orice $u, v \in H$ avem $uv \in H$.

E2: Pentru orice $u, v \in G \setminus H$ avem $uv \in G \setminus H$.

E3: $e \in H$.

E4: Pentru orice $x \in H$ avem $x^{-1} \in H$.

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu:

- A. 4.
- B. 2.
- C. 0.
- D. 3.
- E. 1.

18. Mulțimea tuturor valorilor posibile ale numărului real a pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe \mathbb{R} , este:

- A. $\{\frac{1}{2}\}$.
- B. $\{1\}$.
- C. $\{0\}$.
- D. $[0, 1]$.
- E. \emptyset .

19. Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e . Fie $a, b \in G$, astfel încât $a^4 = e$ și $a^2ba^{-2} = b^4$. Care dintre următoarele enunțuri este cu certitudine adevărat?

- A. $a^2b^3a^{-2} = b^8$.
- B. $a^2b^5a^{-2} = b^{16}$.
- C. $b^{14} = e$.
- D. $b^{15} = e$.

E. $b^{16} = e$.

20. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ este:

- A. $\frac{\pi^2}{4}$.
- B. $\frac{\pi^2}{2}$.
- C. $\frac{\pi}{4}$.
- D. $\frac{\pi^2}{8}$.
- E. $\frac{\pi}{8}$.

21. Fie $n \in \mathbb{N}$ și G un grup cu $2n+1$ elemente, despre care se știe că există o funcție $f : G \rightarrow G$, cu proprietatea că $f(xf(xy)) = yf(x^2)$, pentru orice $x, y \in G$. Considerăm enunțurile:

E1: f este injectivă.

E2: G poate fi grup necomutativ.

E3: $x^8y = yx^8$.

E4: $f(x) = x$, pentru orice $x \in G$.

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu:

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.
- E. 4.

22. Valoarea integralei $I = \int_0^{4\pi} \frac{x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ este:

- A. 2π .
- B. 2.
- C. π .
- D. 1.
- E. 0.

23. Fie $A \subset \mathbb{Z}$ o mulțime care are ca elemente toate numerele naturale prime, opusele lor, 0, 1 și -1 . Fie enunțurile:

E1: Adunarea numerelor nu este lege de compoziție pe A .

E2: Înmulțirea numerelor nu este lege de compoziție pe A .

E3: Există o infinitate de operații $*$ care pot fi legi de compoziție pe A .

E4: Există cel puțin o operație $*$ care definește o structură de grup abelian pe A .

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu:

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.
- E. 4.

24. Spunem că o funcție integrabilă $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ are proprietatea P dacă

$$\int_0^1 f^2(x) dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Fie enunțurile:

E1: Există funcții continue care au proprietatea P .

E2: Există funcții discontinue care au proprietatea P .

E3: Există funcții monotone care au proprietatea P .

E4: Există funcții nemonotone care au proprietatea P .

Numărul de enunțuri adevărate este egal cu:

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

E. 2.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



Societatea de Științe Matematice
din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 26 februarie 2022
CLASA a XII-a

Grila de răspunsuri

1. Răspuns: D
2. Răspuns: B
3. Răspuns: B
4. Răspuns: C
5. Răspuns: C
6. Răspuns: D
7. Răspuns: B
8. Răspuns: C
9. Răspuns: E
10. Răspuns: D
11. Răspuns: D
12. Răspuns: E
13. Răspuns: B
14. Răspuns: C
15. Răspuns: C
16. Răspuns: C
17. Răspuns: B
18. Răspuns: A
19. Răspuns: D
20. Răspuns: D
21. Răspuns: D
22. Răspuns: E
23. Răspuns: E
24. Răspuns: A