

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2i(3-i) - 6i = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1) = f(1)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x-1} = 9^x$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.
- 5p** 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,-1)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{AC} = 2\overline{BC}$.
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin 2x - 2 \operatorname{tg} x \cdot \sin \frac{2x}{3}$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x & 1 \\ 1-x & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$.
- 5p** b) Arătați că $A(1) \cdot A(x) - A(x-1) = 2I_3$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A(1) \cdot A(1) \cdot A(x) = 3A(1) + 2I_3$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy(x+y)}{xy+1}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $\frac{1}{m} * \frac{1}{n} = \frac{1}{16} \cdot (m * n)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2$.

5p b) Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x) dx = \frac{19}{3}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural n , $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)} dx$. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.