

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numerele reale a și b pentru care $(a+bi)(1+i)=4$, unde $i^2=-1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde m este număr real nenul. Determinați numerele reale m pentru care $f(m-x)=f(m+x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x)-1=\log_2(x^2+x+2)$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $F=\{f|f:A \rightarrow A\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un element f din mulțimea F , acesta să verifice inegalitatea $f(n) \leq n$, pentru orice $n \in A$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,3)$ și $B(-1,5)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{OC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB=8$, măsura unghiului C de 30° și punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Determinați distanța de la punctul O la latura AB .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0))=5$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a .
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + aX^2 + 8X - 8$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(-1) = -15$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 1$ este egal cu $15X$.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real a , polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x - (x^4 - 1)\arctg x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -x^2(4x\arctg x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x)) \geq f(x) \geq f(\operatorname{tg} x)$, pentru orice $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{1 + e^{-x}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 (1 + e^{-x}) f(x) dx = 8 + e^3$.

5p b) Arătați că $\int_{-m}^m \frac{f(x)}{x^2 + e^x} dx = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

5p c) Determinați numărul real nenul a pentru care $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{ax} - 1} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.