

**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{tehnologic}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a_6 = a_2 + 4r$ , deci $4r = 16$ , de unde obținem $r = 4$ , unde $r$ este rația progresiei aritmetice $a_1 = a_2 - r = 7 - 4 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(a) = 3a \Leftrightarrow 8a - 5 = 3a$ $a = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$\log_4(3x^2) = \log_4 12$ , de unde obținem $3x^2 = 12$ $x = -2$ , care nu convine; $x = 2$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale $n$ , de două cifre, pentru care $\sqrt{n}$ este număr natural par sunt 16, 36 și 64, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$M(-1,3)$ și $N(3,0)$ , unde punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele segmentelor $AB$ , respectiv $OC$ $MN = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{16}$ , deci $AC = 8$ $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 8\sqrt{3}$ și, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$ , obținem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) =$ $= 3 + 6 = 9$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$B(3) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(4) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3) \cdot B(4) = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} =$ $= 7 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 7B(1)$ , de unde obținem $x = 7$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$C \cdot B(a) = \begin{pmatrix} \frac{-a+1}{3} & \frac{a+2}{3} \\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9} \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ $C \cdot B(a) = B(a) \cdot C = I_2$ , de unde obținem $a = -2$	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>2.a)</b>	$f = X^3 + X^2 + X - 4 \Rightarrow f(2) = 2^3 + 2^2 + 2 - 4 =$ $= 8 + 4 + 2 - 4 = 10$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f = X^3 + X^2 - 4X - 4 \Rightarrow f = (X + 1)(X - 2)(X + 2)$ Rădăcinile polinomului $f$ sunt $-2, -1$ și $2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$x_1 + x_2 + x_3 = -1, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2m$ , unde $x_1, x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$ Cum $m$ este număr natural nenul, obținem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$ , deci polinomul $f$ <b>nu</b> are toate rădăcinile reale	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2) - (x^2-2x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} =$ $= \frac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}, x \in (-2, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+1}{e^x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{e^x(x+3)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x(x+4)} = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{18}{(x+2)^3}, x \in (-2, +\infty)$ $f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (-2, +\infty)$ , de unde obținem că funcția $f$ este convexă	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^3 \left( f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \int_1^3 (x+1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} - 1 = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^8 (f(x) - x - 1) dx = \int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_0^8 (x+1)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} \Big _0^8 =$ $= 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$V = \pi \int_0^3 g^2(x) dx = \pi \int_0^3 \left( (x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx =$ $= \pi \int_0^3 (x+1)' \left( (x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left( \frac{(x+1)^3}{3} + 4 \cdot \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + \ln(x+1) \right) \Big _0^3 =$ $= \pi \left( \frac{64}{3} + \frac{32}{3} + \ln 4 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right) = \pi \left( \frac{91}{3} + \ln 4 \right)$	<b>2p</b> <b>3p</b>