

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR  
19 iulie 2023

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$ , soluțiile ecuației  $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ , unde  $m$  este număr real,  $m \neq 1$ .
- 7p a) Arătați că  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4$ , pentru orice număr real  $m$ ,  $m \neq 1$ .
- 8p b) Demonstrați că **nu** există niciun număr real  $m$  pentru care  $x_1, x_2 \in (-2, 1)$ .
2. Se consideră dreptunghiul  $ABCD$ , cu  $AB = 5\sqrt{3}$  cm,  $BC = 5$  cm și punctul  $O$ , intersecția diagonalelor  $AC$  și  $BD$ . Perpendiculara în  $O$  pe dreapta  $BD$  intersectează dreptele  $AB$  și  $AD$  în punctele  $E$ , respectiv  $F$ .
- 7p a) Arătați că aria patrulaterului  $AFBC$  este egală cu  $25\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.
- 8p b) Determinați măsura unghiului format de dreptele  $AC$  și  $DE$ .
3. Se consideră  $x_1, x_2$  și  $x_3$  rădăcinile polinomului  $f = X^3 + X^2 + aX + 1$ , unde  $a$  este număr real.
- 7p a) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul  $a$ ,  $\frac{1}{x_1^3 + x_1^2 + 1} + \frac{1}{x_2^3 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{x_3^3 + x_3^2 + 1} = 1$ .
- 8p b) Determinați numerele întregi  $a$  pentru care polinomul  $f$  are o rădăcină număr întreg.
4. Se consideră funcția  $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \frac{x+5}{x+3}$ .
- 7p a) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \ln n - (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))) = \ln 20$ .
- 8p b) Determinați numerele întregi  $p, q$  și  $r$  pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$  are aria egală cu  $p \ln 2 + q \ln 3 + r \ln 5$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VII-a
<b>1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Recunoașterea unor relații matematice care reprezintă ecuații</li><li>- Identificarea necunoscutelor, coeficienților, termenilor liberi ai unei ecuații</li><li>- Furnizarea unor exemple de relații matematice care reprezintă ecuații sau sisteme de ecuații liniare</li><li>- Identificarea și notarea datelor cunoscute și a datelor necunoscute în cazul problemelor care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau sistemelor de ecuații</li></ul>
<b>2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Verificarea, prin calcul, că un număr dintr-o enumerare este soluție a unei ecuații</li><li>- Verificarea, prin calcul, a soluției unui sistem de ecuații liniare</li><li>- Verificarea, prin calcul, că un număr real este soluție comună a unor ecuații</li></ul>
<b>3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Aducerea unor egalități la o formă mai simplă prin transformări echivalente</li><li>- Aplicarea transformărilor pentru obținerea unor sisteme de ecuații liniare echivalente</li><li>- Utilizarea probei pentru justificarea unui rezultat obținut</li></ul>

**4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare**

- Rezolvarea unor ecuații de forma  $ax + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$
- Utilizarea metodelor de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare (metoda reducerii și metoda substituției)
- Verificarea validității unei soluții a unei ecuații sau a unui sistem de ecuații

**5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare**

- Utilizarea transformărilor echivalente a ecuațiilor pentru fundamentarea unei metode de rezolvare
- Evidențierea unor soluții asociate unei ecuații liniare în cadrul unui sistem de ecuații (de exemplu, observarea faptului că fiecare dintre ecuațiile unui sistem de ecuații liniare are mai multe soluții)
- Compararea metodelor de rezolvare a unor sisteme de ecuații liniare

**6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare**

- Transpunerea relațiilor cuprinse într-o situație dată sub formă de ecuații
- Rezolvarea unor probleme având conținut practic, utilizând ecuații sau sisteme de ecuații liniare
- Utilizarea estimărilor pentru încadrarea într-un ordin de mărime a soluției unei ecuații

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Algebră	<b>2. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități</li><li>• Ecuații de forma <math>ax + b = 0</math>, unde <math>a, b \in \mathbb{R}</math>; mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente</li><li>• Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute; rezolvare prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii</li><li>• Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare</li></ul>

**Notă:** Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Ecuații și sisteme de ecuații liniare**”, folosind informațiile din secvența de mai sus, elaborați trei itemi: un *item cu răspuns scurt*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip întrebare structurată*.

În elaborarea itemilor veți avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item;
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare);
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.