Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2 + 9\right) = 2\lg\left(x\sqrt{10}\right)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii AC, iar punctele D și E aparțin segmentului AB, astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.

2. Pe mulțimea $M = [-1,1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \dfrac{xy}{1 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)}}$.

5p **a)** Arătați că $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.

5p **c)** Determinați perechile (a, b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln\left(e^x + x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-2}^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 \dfrac{1}{f(x)}\,dx\le\dfrac{\pi}{2}$.