Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z(z-2i)=(3+i)(3-i)=3^2-i^2=$	**3p**
	$=9+1=10$	**2p**
2.	$f(2x)=10x+1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(2x)-2f(x)=10x+1-2(5x+1)=10x+1-10x-2=-1$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$x^3-2x+2=x^3$, deci $-2x+2=0$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 9 numere n pentru care $n+5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**3p**
5.	$m_{AB}=4$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d=4$	**3p**
	Ecuația dreptei este $y-0=4(x-0)$, adică $y=4x$	**2p**
6.	$AD=\dfrac{BC}{2}$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AD\cdot BC}{2}=4$, de unde obținem $BC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+2+0-0-0+2=8$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{vmatrix}=-a^2+2a+8$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0 \Leftrightarrow a=-2$ sau $a=4$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$	**3p**
c)	Pentru $a=-2$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2,-2-2\alpha,\alpha)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$	**3p**
	$x_0z_0+y_0=2\alpha-2-2\alpha=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații	**2p**
2.a)	$2\circ 3=2\cdot 3+\left(2^2-2\right)\left(2^3-2\right)=$	**3p**
	$=6+12=18$	**2p**

b)	$x\circ 1=x\cdot 1+\left(2^x-2\right)\left(2^1-2\right)=x+0=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1\circ x=1\cdot x+\left(2^1-2\right)\left(2^x-2\right)=x+0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$x\circ(-x)=-x^2+1-2\cdot 2^x-2\cdot 2^{-x}+4=$	**2p**
	$=-x^2+1-2\cdot\left(2^x-2+\frac{1}{2^x}\right)=1-x^2-2\cdot\left(\sqrt{2^x}-\frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2\leq 1$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+3\left(\ln(x+3)-\ln(x-1)\right)'=1+\frac{3}{x+3}-\frac{3}{x-1}=$	**3p**
	$=\frac{x^2+2x-3+3x-3-3x-9}{(x+3)(x-1)}=\frac{x^2+2x-15}{(x+3)(x-1)}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\ln\frac{x+3}{x-1}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln\frac{x+3}{x-1}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=3$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1,3]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(3)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f(3)=3+3\ln 3$, deci $x+3\ln\frac{x+3}{x-1}\geq 3+3\ln 3$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem $\ln\frac{x+3}{3(x-1)}\geq 1-\frac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^3 f(x)e^x dx=\int\limits_0^3\left(x^2+2x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+9=18$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1\frac{f(x)}{x+2}dx=\int\limits_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=x\left(-e^{-x}\right)\Big\vert_0^1-e^{-x}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{e-2}{e}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int\limits_0^x f(t)dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)e^{-x}}{2}=1$	**3p**