

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ și M , mijlocul segmentului AB . Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Demonstrați că $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p** a) Arătați că $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) \circ x = -1$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m < n$, pentru care $m \circ n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f .