

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
19 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu rația diferită de zero și $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, pentru orice număr natural nenul n .
- 7p a) Arătați că $2S_{25} = 25(a_5 + a_{21})$.
- 8p b) Determinați numerele a_1 , a_3 și a_{10} , știind că acestea sunt în progresie geometrică în această ordine și că suma lor este egală cu 134.
2. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și punctul M aparținând laturii AB astfel încât $\triangle AMC \equiv \triangle DMB$.
- 7p a) Arătați că punctul M este mijlocul laturii AB .
- 8p b) Demonstrați că $\frac{CN}{MN} = \frac{OD}{MD}$, unde $AC \cap DB = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{N\}$.
3. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$, unde a și b sunt numere reale, $a - b \neq -2$.
- 7p a) Determinați numărul real b , știind că $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = 1$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 8p b) Știind că rădăcinile x_1 , x_2 și x_3 ale polinomului f sunt numere reale mai mari sau egale cu zero, demonstrați că $a + b \leq \frac{8}{27}$.
4. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$.
- 7p a) Arătați că $f(x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
- 8p b) Se consideră numărul real $a \in (0, 1)$. Pentru fiecare număr natural n , se consideră numărul
- $$I_n = \int_a^1 \frac{f(x^{2n})}{x^n} dx.$$
- Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a
1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime - Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor de numere reale - Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor făcând legătura între tipurile de intervale și submulțimile drepte - Identificarea apartenenței unui element la o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor ei

2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei

- *Reprezentarea pe axa numerelor a intersecției a două intervale*
- *Reprezentarea pe axa numerelor a reuniunii a două intervale cu intersecția nevidă*
- *Verificarea faptului că un număr este soluția unei inecuații*
- *Verificarea apartenenței unui obiect la o mulțime pe baza unei/unor proprietăți a/ale elementelor acesteia*

3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în \mathbb{R}

- *Aproximarea numerelor reale pentru reprezentarea unor intervale*
- *Reprezentarea unui interval sub forme echivalente (notație, reprezentarea pe axa numerelor)*
- *Transformarea unei inecuații într-o inecuație echivalentă folosind proprietățile relației de ordine*

4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații

- *Utilizarea terminologiei specifice intervalelor de numere reale în contexte interdisciplinare*
- *Rezolvarea unei inecuații de forma $|ax + b| < c$, (\leq) , unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$*
- *Selectarea, dintr-o mulțime dată, a elementelor care verifică o condiție suplimentară*

5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații

- *Rezolvarea unor inecuații de forma $ax + b < 0$, $(>, \leq, \geq)$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$*
- *Descrierea mulțimii soluțiilor unei probleme printr-o proprietate care le caracterizează*
- *Rezolvarea de inecuații de forma $\frac{a}{bx + c} < 0$, $(>, \leq, \geq)$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$*

6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații

- *Estimarea erorii unui calcul aproximativ cu numere reale*
- *Utilizarea de estimări pentru a compara/ordona numere reale în diferite contexte*
- *Modelarea unei situații concrete utilizând inecuații studiate*
- *Interpretarea soluțiilor unei inecuații în rezolvarea unor probleme concrete*

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Mulțimi. Numere	<p>1. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor • Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor • Inecuații de forma $ax + b \geq 0$, $(\leq, <, >)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}** ”, folosind informațiile din secvența precedentă, elaborați trei itemi: un *item de tip completare*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip întrebare structurată*.

În elaborarea itemilor veți avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare);
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.