

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $3 - 4i + i(4 - i) = 4$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 2x$. Arătați că $(f \circ f)(1) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2 - 2x + 6) = \log_5 6$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(a, 0)$ și $C(0, b)$. Determinați numerele reale a și b , știind că punctul A este mijlocul segmentului BC .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = AC = 10$ și $BC = 16$. Arătați că $AD = 6$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(B(2)) = 4$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $B(0) \cdot B(1) = aA$.
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = A \cdot (B(0) - 3I_2)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + mX - 3$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 0$, arătați că $f(1) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$.
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1 x_2 x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) + f(x^2) \geq \frac{17}{3}$, pentru orice $x \in (1, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-1)^2$.
- 5p** a) Arătați că $\int_3^7 \frac{f(x)}{(x-1)^2} dx = 20$.
- 5p** b) Arătați că $\int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{1}{2}$.

5p c) Arătați că $\int_0^1 \frac{xf(e^x)}{e^x} dx = \frac{e^2 - 5}{4}$.