Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=3-i$ și $z_2=1+i$. Arătați că $z_1+iz_2=2$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a+1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(4x-x^2\right)=1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre, cu cifra zecilor număr par, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(2,0)$ și C. Știind că punctul B este mijlocul segmentului OC, determinați distanța dintre punctele A și C.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $B=\frac{\pi}{6}$ și mediana $AM=4$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&3x-3\\1-x&3x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=3$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $A(2)\cdot A(0)+A(5)=mI_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(x)-A(0)\cdot A(1-x)\right)=3$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+1-\sqrt{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 8=7$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ\frac{3}{x}=x$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\left(n\circ(n+2)\right)\circ(n+4)>\frac{n^2}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3+2x^2\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x\left(x^2+5x+4\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $-\frac{32}{e^{x+4}}\le x^2(x+2)\le\frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x\in[-4,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-\frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\frac{2}{x+1}\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^5 \left(3x^2 - f(x)\right) dx = 2\ln 3$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\sqrt{x} - 1\right)$. Arătați că $\int_1^4 \left(a + bg(x)\right) g'(x)\, dx = 4a$, pentru orice numere reale a și b.