MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"***

**ETAPA JUDEȚEANĂ**
**10 martie 2024**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**
**Clasa a IX–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică**

## Subiectul 1.

a) Rezolvați în $\boldsymbol{R}$ ecuația $\left[\frac{2x-3}{4}\right] = x - 1$.

*b) Demonstrați că* $|3x-7| + 3|x-3| \geq 2$, *pentru orice număr real x.*

## SOLUȚIE:

a) Cum $x - 1 = \left[\frac{2x-3}{4}\right]$ rezultă că $x - 1 \in \boldsymbol{Z}$, deci $x \in \boldsymbol{Z}$ ..........1p

$\frac{2x-3}{4} - 1 < \left[\frac{2x-3}{4}\right] \leq \frac{2x-3}{4}$ ..........1p

$\frac{2x-3}{4} - 1 < x - 1 \leq \frac{2x-3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ ..........2p

$x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \boldsymbol{Z} \Rightarrow x \in \{-1, 0\}$ ..........1p

b) $|3x-7| + 3|x-3| = |3x-7| + |3x-9| = |3x-7| + |9-3x| \geq$ ..........1p

$\geq |3x - 7 + 9 - 3x| = 2$ ..........1p

## Subiectul 2.

*La Grădina Botanică "Anastasie Fătu" din Iași s-a organizat o expoziție de plante exotice. În primele 15 zile numărul vizitatorilor a crescut cu același număr de persoane de la o zi la alta iar din a 16-a zi numărul acestora s-a înjumătățit în raport cu ziua precedentă. În cea de a 15-a zi numărul vizitatorilor a fost de 8 ori mai mare decât în prima zi iar în a 5-a zi au fost înregistrați 600 de vizitatori. Notăm cu* $a_n$ *numărul de vizitatori din cea de a n-a zi.*

*a) Să se determine* $a_1$, $a_{15}$ *și* $a_{17}$.

*b) Să se determine după câte zile numărul de vizitatori înregistrați a fost 15050 .*

*c) Stabiliți dacă mai există o zi în care expoziția a fost vizitată de același număr de persoane ca în cea de-a 17- a zi.*

## SOLUȚIE:

a) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}$ formează o progresie aritmetică crescătoare cu rația $r$ , iar $a_{15}, a_{16}, a_{17} \ldots$ formează o progresie geometrică descrescătoare cu rația $q = \frac{1}{2}$ ..........1p

Cf. enunțului $a_{15} = 8 \cdot a_1$ și $a_5 = 600$ deci $\begin{cases} a_1 + 14r = 8 \cdot a_1 \\ a_1 + 4r = 600 \end{cases}$ și găsește $r = 100$ , $a_1 = 200$ ..........1p

Calculează $a_{15} = a_1 + 14r = 1600$ și $a_{17} = a_{15} \cdot q^2 = 1600 \cdot \frac{1}{4} = 400$ ..........1p

b) Calculează $a_1 + a_2 + \ldots a_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = 13500$ ..........1p

$$a_{16}+a_{17}+\ldots+a_n=a_{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+a_{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+a_{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-15}=1600\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-15}-1}{-\frac{1}{2}}=1600\left(1-\frac{1}{2^{n-15}}\right)$$

$1600\left(1-\frac{1}{2^{n-15}}\right)=15050-13500=1550\Rightarrow 1-\frac{1}{2^{n-15}}=\frac{1550}{1600}\Rightarrow 2^{n-15}=32\Rightarrow n=20$ ...................................1p

c) Explică faptul că egalitatea $a_m = a_p$ poate avea loc doar dacă $1 \leq m \leq 15$ şi $16 \leq p \leq 20$ ............ ....1p
$a_{17}=a_1+(m-1)r\Rightarrow 400=200+(m-1)\cdot 100\Rightarrow m=3$ adică în cea de a treia zi. ................................1p

## Subiectul 3.

*a) Determinați funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, care verifică pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$, relația $2f(x) - 3f(-x) = 5x - 2$.*
*b) Determinați funcțiile $f \circ g$ și $1_{\boldsymbol{R}} \circ g$ pentru $f, g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g(x) = -2x + 1$. Precizați punctele de intersecție ale graficului funcției $f \circ g$ cu axele de coordonate.*

## SOLUȚIE:

a) Pentru $x \to -x$ relația din enunț devine $2f(-x) - 3f(x) = -5x - 2$ ..............................................1p

Rezolvă sistemul $\begin{cases} 2f(x) - 3f(-x) = 5x - 2 \\ -3f(x) + 2f(-x) = -5x - 2 \end{cases} \Rightarrow -5f(x) = -5x - 10$ ..........................................1p

Obține $f(x) = x + 2$ ..........................................................................................................................1p

b) $f \circ g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, (f \circ g)(x) = -2x + 3$ ..........................................................................................1p

$1_{\boldsymbol{R}}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, 1_{\boldsymbol{R}}(x) = x,\ 1_{\boldsymbol{R}} \circ g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ (1_{\boldsymbol{R}} \circ g)(x) = -2x + 1$ ........................................................1p

$(f \circ g)(x) = 0 \Rightarrow G_{f\circ g} \cap Ox = A(\frac{3}{2}, 0)$ .................................................................................1p

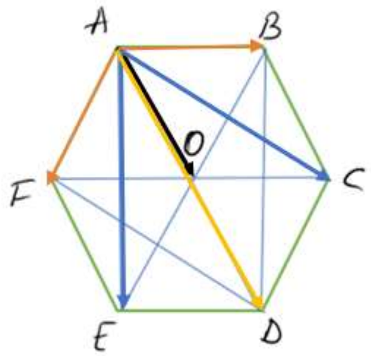
$(f \circ g)(0) = 3 \Rightarrow G_{f\circ g} \cap Oy = B(0,3)$ .................................................................................1p

## Subiectul 4.

*În Munții Apuseni, în zona turistică Arieșeni, se pot vizita o multitudine de peșteri aflate pe trasee turisitice accesibile. Șase dintre ele,notate cu A,B,C, D E, F formează pe hartă un hexagon regulat.*
*Trei echipe de cercetași E1, E2, E3 au plecat simultan de la peștera A spre peștera D pe traseele A-B-D, A-F-D și respectiv A-E-D deplasându-de doar în linie dreaptă cu viteze de deplasare constante $x$, $y$, respectiv $z$ (m/s). Știind că $x, y, z$ verifică relațiile : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=x\cdot\overrightarrow{AO}$ , $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=y\cdot\overrightarrow{AO}$ , $\overrightarrow{AD}=z\cdot\overrightarrow{AO}$ , unde O este centrul hexagonului, să se determine :*

*a) Vitezele de deplasare ale celor trei echipe;*
*b) Ordinea sosirii echipelor la destinație ;*
*c) Distanțele parcurse de cele trei echipe, știind că latura hexagonului este de 4 cm iar scara hărții este de 1 : 100.000, (se aproximează $\sqrt{3} \simeq 1,73$ ).*

**SOLUȚIE:**




a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$ ( reg. paralelogramului) $\Rightarrow x=1\ m/_s$
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=2\cdot\overrightarrow{AO}\Rightarrow z=2\ m/_s$ ……………….....………1p

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\underbrace{\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)}_{reg\ \Delta}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}\right)}_{reg\ \Delta}=2\overrightarrow{AO}+\underbrace{\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)}_{\overrightarrow{OD}(reg\square)}=2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{AO}$$

Deci din $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=y\cdot\overrightarrow{AO}\ \underbrace{\Rightarrow y=3\ m/_s}_{rel\ (1)}$………..…..……..2p

b) Justifică egalitatea lungimilor celor 3 trasee $AB+BD=AF+FD=AE+ED$ deoarece $AB=AF=ED$( laturi hexagon) și $BD=FD=AE$( diagonale în romburi identice) .......................................1p

Traseele fiind egale, ordinea sosirii este data de ordinea descrescătoare a vitezelor echipelor. Avem că $x<z<y$ deci echipa E2 ajunge prima (are viteză cea mai mare) urmată de echipa E3 iar echipa E1ajunge ultima...........................................................................................................................1p

c) Calculează lungimea unui traseu pe hartă de exemplu:

$AB+BD=l+2\cdot h_{\Delta BOC_{ech}}=4+2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{2}=4\left(1+\sqrt{3}\right)\simeq 4(1+1,73)=10,92\ cm$ ………....…......……1p

Determină distanța reală a traseului: $10,92\ cm\cdot 100000=1092000\ cm=10,92\ Km$……......…......…....1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEȚEANĂ
## 10 martie 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
## Clasa a X–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

## Subiectul 1.

*Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:*

**a)** $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$ .

**b)** $\frac{\log_2 x}{\log_4(2x)} = \frac{\log_8(4x)}{\log_{16}(8x)}$ .

**c)** $\sqrt{\frac{5x-1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{5x-1}} = \frac{10}{3}$ .

## SOLUȚIE:

**a)** Domeniul de existență a ecuației este $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ . Împărțim membrii ecuației prin $4^{\frac{1}{x}}$ și obținem ecuația $6 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^2 - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 = 0$ . Notăm $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y$, unde $y > 0$ și obținem ecuația $6y^2 - 13y + 6 = 0$, cu soluțiile $y_1 = \frac{2}{3}$ , $y_2 = \frac{3}{2}$ . ....................1p

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. $S = \{-1; 1\}$. ....................1p

**b)** Domeniul de existență a ecuației este $(0;\ \infty)\backslash\left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right\}$. Schimbăm bazele logaritmilor și obținem $\log_4(2x) = \frac{1+\log_2 x}{2}$ , $\log_8(4x) = \frac{2+\log_2 x}{3}$ , $\log_{16}(8x) = \frac{3+\log_2 x}{4}$ . ....................1p

Notăm $\log_2 x = y$, obținem ecuația de gradul al doilea $y^2 + 3y - 4 = 0$ , $y_1 = -4, y_2 = 1$ . ....................1p

$\log_2 x = -4 \Rightarrow x = \frac{1}{16} \in (0;\ \infty)\backslash\left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right\}$; $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2 \in (0;\ \infty)\backslash\left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right\}$ . $S = \left\{\frac{1}{16}; 2\right\}$. ....................1p

**c)** Domeniul de existență a ecuației este $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \infty)$. Notăm $\sqrt{\frac{5x-1}{x-1}} = y, \sqrt{\frac{x-1}{5x-1}} = \frac{1}{y}$ , $y > 0$.

Ecuația devine $3y^2 - 10y + 3 = 0$ , cu soluțiile $y_1 = \frac{1}{3} > 0, y_2 = 3 > 0$. ....................1p

$\sqrt{\frac{5x-1}{x-1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{11} \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$; $\sqrt{\frac{5x-1}{x-1}} = 3 \Rightarrow x = 2 \in (1; \infty)$. $S = \left\{\frac{2}{11}; 2\right\}$. ....................1p

## Subiectul 2.

***a)*** *Fie* $z = (3+5i)^{4n} + (5+3i)^{4n}$, *unde* $i$ *este unitatea imaginară și* $n \in \mathbb{N}$. *Arătați că* $z$ *este număr real, pentru orice număr natural* $n$.

***b)*** *Fie numerele complexe* $z_1$, $z_2$ *și* $z_3$ *cu proprietățile:* $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ *și* $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. *Demonstrați că* $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

## SOLUȚIE:

**a)** $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ....................1p

$\bar{z} = \overline{(3+5i)^{4n} + (5+3i)^{4n}} = (3-5i)^{4n} + (5-3i)^{4n} = [(-i)(5+3i)]^{4n} + [(-i)(3+5i)]^{4n} =$ ........1p

$= [(-i)^4]^n(5+3i)^{4n} + [(-i)^4]^n(3+5i)^{4n} = (3+5i)^{4n} + (5+3i)^{4n} = z$ ....................1p

**b)** $|z_i| = 1 \Longrightarrow |z_i|^2 = 1 \Longrightarrow z_i \cdot \bar{z}_i = 1 \Longrightarrow \bar{z}_i = \frac{1}{z_i}, \forall i \in \{1,2,3\}$ ....................1p

$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3 = 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$

$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |(z_1 + z_2 + z_3)^2| = 2|z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3|$ (1) ....................1p

$|z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3| = \left|\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1z_2z_3}\right| = \left|\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}\right| = |\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}| =$

$|\overline{z_1+z_2+z_3}| = |z_1+z_2+z_3|$ (2) ........................................................................................................1p

Din(1) și (2) obținem $|z_1+z_2+z_3|^2 = 2\cdot|z_1+z_2+z_3| \Longrightarrow |z_1+z_2+z_3|\cdot(|z_1+z_2+z_3|-2)=0$

Dar $z_1+z_2+z_3 \neq 0 \Longrightarrow |z_1+z_2+z_3| \neq 0 \Longrightarrow |z_1+z_2+z_3| = 2$ ..........................................................1p

## Subiectul 3.

**a)** *Arătați că* $(\lg 5)^3 + (\lg 20)^3 + (\lg 8)\cdot(\lg 0{,}25) = 2$ .

**b)** *Știind că* $a, b \in (0,1)$, *demonstrați că* $\log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 2$ .

**c)** *Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația:* $\lg(4^{x-2}+9) + \lg 2 \leq \lg(2^{x-2}+1) + 1$ .

## SOLUȚIE:

**a)** $\lg 5 = \lg\left(\frac{10}{2}\right) = 1 - \lg 2$; $\lg 20 = 1 + \lg 2$; $\lg 8 = 3\lg 2$; $\lg 0{,}25 = \lg\frac{1}{4} = -2\lg 2$ ......................1p

$(1-\lg 2)^3 + (1+\lg 2)^3 + (3\lg 2)\cdot(-2\lg 2) = 2.$ ..................................................................................1p

**b)** Folosind inegalitatea dintre media armonică și cea geometrică: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ și monotonia funcției logaritmice cu bază subunitară pe $(0,+\infty)$ obținem $log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq log_a\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\cdot(1+\log_a b)$ și

$log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq log_b\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\cdot(1+log_b a)$ ..........................................................................................1p

$0 < a < 1 \Longrightarrow \log_b a > \log_b 1 = 0$ și $0 < b < 1 \Longrightarrow \log_a b > \log_a 1 = 0.$

Utilizând inegalitatea mediilor: $\frac{\log_a b + \log_b a}{2} \geq \sqrt{\log_a b\cdot\log_b a}$ obținem:

$log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 1 + \frac{\log_a b + \log_b a}{2} \geq 1 + \sqrt{\log_a b\cdot\log_b a}$=1+1=2 ........................................1p

**c)** Folosind monotonia funcției logaritmice cu bază supraunitară pe $(0,+\infty)$, inegalitatea $\lg(4^{x-2}+9)\cdot 2 \leq \lg(2^{x-2}+1)\cdot 10$ devine $4^{x-2}+9 \leq 5\cdot 2^{x-2}+5 \Leftrightarrow 4^{x-2} - 5\cdot 2^{x-2} + 4 \leq 0$.........1p

Notând $t = 2^{x-2},\ t > 0,$ obținem $t^2 - 5\cdot t + 4 \leq 0 \Longrightarrow t \in [1,4]$ .........................................................1p

$1 \leq 2^{x-2} \leq 2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x-2 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [2,4]$ .....................................................................1p

## Subiectul 4.

**a)** *O echipă de proiect este formată din 3 profesori și 5 elevi. În câte moduri se poate forma o delegație alcătuită din 5 persoane astfel încât ea să conțină cel puțin 3 elevi?*

**b)** *Un autoturism se deplasează cu viteza de 90 km/h la vale, cu 72 km/h pe loc drept și cu 60 km/h la deal. În aceste condiții autoturismul a parcurs distanța de la Iași la Brașov în 5 ore, iar distanța de la Brașov la Iași în 4 ore. Aflați distanța de la Iași la Brașov.*

## SOLUȚIE:

**a)** Delegația poate conține doi profesori și trei elevi sau un profesor și patru elevi sau cinci elevi.

Doi profesori pot fi aleși din trei profesori în $C_3^2$ moduri. Pentru fiecare din aceste alegeri, cei trei elevi pot fi aleși în $C_5^3$ moduri. Delegația formată din doi profesori și trei elevi poate fi aleasă în $C_3^2\cdot C_5^3$ moduri. .......................1p

Analog, delegația formată dintr-un profesor și patru elevi se poate forma în $C_3^1\cdot C_5^4$ moduri.

Delegația formată din cinci elevi se poate alege în $C_3^0\cdot C_5^5$ moduri. ..........................................................1p

Delegația formată din cinci membri în care sunt cel puțin trei elevi se poate forma în $C_3^2\cdot C_5^3 + C_3^1\cdot C_5^4 + C_3^0\cdot C_5^5$ $= 3\cdot 10 + 3\cdot 5 + 1\cdot 1 = 30 + 15 + 1 = 46$ moduri. ..........................................................1p

**b)** $t = \frac{S}{v}$ , unde $S$ reprezintă distanța parcursă de autoturism cu viteza constantă $v$ , în intervalul de timp $t$.

Notăm cu $x$ numărul de km parcurși la coborâre, cu $y$ numărul de km parcurși pe loc drept și cu $z$ numărul de km parcurși la urcare de la Iași la Brașov. $\frac{x}{90} + \frac{y}{72} + \frac{z}{60} = 5$ . .......................................................................1p

Dacă drumul este parcurs de la Brașov la Iași , atunci $\frac{z}{90} + \frac{y}{72} + \frac{x}{60} = 4$ . .......................................................1p

$\left(\frac{x}{90} + \frac{x}{60}\right) + \frac{2y}{72} + \left(\frac{z}{60} + \frac{z}{90}\right) = 9 \Rightarrow \frac{5x}{180} + \frac{y}{36} + \frac{5z}{180} = 9$ . ..............................................................1p

$x + y + z = 36\cdot 9 = 324$. Distanța de la Iași la Brașov este de 324 km. ...........................................................1p

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

**ETAPA JUDEȚEANĂ**
**10 martie 2024**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**
**Clasa a XI–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică**

## Subiectul 1.

*Fie mulțimea* $\mathcal{M} = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \ln a & 0 & 1 \end{pmatrix} \;/\; a \in (0; +\infty) \right\}$.

a) *Demonstrați că produsul oricăror două matrice din mulțimea* $\mathcal{M}$ *este o matrice din mulțimea* $\mathcal{M}$.

b) *Determinați perechile de numere naturale nenule* $(m, n)$, *cu* $m > n$, *astfel încât pentru matricele* $M(m)$ *și* $M(n)$ *din mulțimea* $\mathcal{M}$, *să aibă loc relația:*

$$det\big(M(m) \cdot M(n)\big) - det\big(M(m)\big) - det\big(M(n)\big) = 2024.$$

c) *Determinați matricele* $M(a) \in \mathcal{M}$, *cu* $a \in \mathbb{N}^*$, *pentru care există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $M^n(a) = M(4096)$.

## SOLUȚIE:

a) Fie $M(x), M(y) \in \mathcal{M} \Rightarrow M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ \ln x & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ \ln y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x \cdot y & 0 \\ \ln x + \ln y & 0 & 1 \end{pmatrix} =$...........1p

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x \cdot y & 0 \\ \ln(x \cdot y) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x \cdot y) \Rightarrow M(x) \cdot M(y) = M(x \cdot y)$; $x, y \in (0; +\infty) \Rightarrow x \cdot y \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow M(x \cdot y) \in \mathcal{M} \Rightarrow M(x) \cdot M(y) \in \mathcal{M}$.....1p

b) $det\big(M(x)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ \ln x & 0 & 1 \end{vmatrix} = x$

$M(m) \cdot M(n) = M(m \cdot n) \Rightarrow det\big(M(m) \cdot M(n)\big) - det\big(M(m)\big) - det\big(M(n)\big) = 2024 \Leftrightarrow m \cdot n - m - n = 2024$..........................................................................................................................................1p

$m \cdot n - m - n + 1 = 2025 \Leftrightarrow (m-1)(n-1) = 2025$ și $m > n \Rightarrow$

$(m, n) \in \{(2026,2), (676,4), (406,6), (226,10), (136,16), (82,26), (76,28), \}$.....................................................1p

c) Se demonstrează prin inducție $M^n(a) = M(a^n), (\forall) M(a) \in \mathcal{M}$...........................................................................1p

$\Rightarrow M(a^n) = M(4096) \Rightarrow a^n = 4096$.

$4096 = 2^{12} \Rightarrow$ 4096 se poate scrie ca putere de număr natural nenul doar ca $4096^1, 64^2, 16^3, 8^4, 4^6, 2^{12}$............1p

Astfel, $M^1(4096) = M^2(64) = M^3(16) = M^4(8) = M^6(4) = M^{12}(2) = M(4096) \Rightarrow$ matricele sunt:

$M(2), M(4), M(8), M(16), M(64), M(4096)$..............................................................................................1p

## Subiectul 2.

*Se consideră mulțimea de matrice* $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} / x \in R \right\}$

a) *Demonstrați că orice matrice din mulțimea M este inversabilă și că inversa aparține mulțimii M;*

b) *Demonstrați că soluția ecuației* $A(a) \cdot X = A(b)$, *unde* $X \epsilon M_3(R)$ *și* $A(a), A(b) \in M$, *este element al mulțimii M;*

c) *Calculați* $[A(2)]^{2024}$.

## SOLUȚIE:

a) arată că $\det A(x) = 1 \neq 0, (\forall) x \in R \rightarrow A(x)$ *inversabilă* ....................................................1p

calculează $A^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} = A(-x) \in M$ ....................................................1p

b) $A(a)$*inversabilă*, $A^{-1}(a) = A(-a),\ X = A(-a) \cdot A(b)$ ....................................................1p

$X = A(-a + b) \in M$ ....................................................1p

c) *deduce* $A^n(x) = A(nx), (\forall) x \in R$ *și* $(\forall) n \geq 1$ ....................................................1p

*demonstrază prin inducție că* $A^n(x) = A(nx), (\forall) x \in R$ *și* $(\forall) n \geq 1$ ....................................................1p

*calculează* $A^{2024}(2) = A(4048)$ ....................................................1p

## Subiectul 3.

*Se consideră funcția* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3, & x \leq -1 \\ ax^2 + ax - 1, & x > -1 \end{cases}$, *unde* $a \in \mathbb{R}^*$.

a) *Demonstrați că funcția* $f$ *este continuă, oricare ar fi* $a \in \mathbb{R}^*$.

b) *Determinați numărul real nenul* $a$ , *astfel încât funcția* $f$ *să fie derivabilă în* $x_0 = -1$.

c) *Demonstrați că funcția* $f$ *are o singură rădăcină în intervalul* $I = [0; 2]$, *oricare ar fi* $a > \frac{1}{6}$.

## SOLUȚIE:

a) i) $f$ continuă pe intervalul $(-\infty; -1)$ deoarece este funcție de gradul doi, elementară;

ii) $f$ continuă pe intervalul $(-1; +\infty)$ deoarece este funcție de gradul doi, elementară;....................................................1p

iii) în $x_0 = -1$

$$\left. \begin{array}{l} l_s = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x^2 + 5x + 3) = -1 \\ l_d = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (ax^2 + ax - 1) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0 = -1$$

Din i), ii) și iii)⇒f continuă pe ℝ....................................................1p

b) $f$ derivabilă în $x_0 = -1 \Leftrightarrow f'_s(-1) = f'_d(-1)$

$f'_s(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + 5x + 3 - (-1)}{x + 1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{(x+1)(x+4)}{x + 1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x + 4) =$

3 ....................................................1p

$f'_d(-1) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{ax^2+ax-1-(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{ax^2+ax}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{ax(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} ax = -a$......1p

$f'_s(-1) = f'_d(-1) \Rightarrow 3 = -a \Rightarrow a = -3$.......................................................................................1p

c) $f|_{(-1;+\infty)} = ax^2 + ax - 1$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$ și $a > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0;2] \Rightarrow f$ injectivă$\Rightarrow$ ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție în intervalul $[0;2]$....................................................1p

Funcția $f$ continuă pe intervalul $[0;2] \Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux pe $[0;2]$

Cum $f(0)\cdot f(2) = -1(6a-1) = 1-6a < 0, (\forall)a > \frac{1}{6} \Rightarrow (\exists)x_0 \in (0;2)$ astfel încât $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ $x_0$ soluție unică a ecuației $f(x) = 0$ pe intervalul $[0;2] \Rightarrow x_0$ este singura rădăcină a funcției $f$ pe intervalul $[0;2]$...............................................................................................................1p

***Altă soluţie:***

Ne interesează doar restricţia funcţiei la intervalul $I = [0;2]$: $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + ax - 1$.

Cum $f$ continuă şi $f(0) = -1$ , $f(2) = 6a - 1 > 0$ ..................................................1p

iar $f'(x) = a(2x+1) > 0, \forall a > \frac{1}{6}$, $\forall x \in [0,2]$, deci funcţia este strict crescătoare pe $[0,2]$,

rezultă că avem o singură soluţie în intervalul $I = [0;2]$ ...............................................................1p

## Subiectul 4.

*Transpusă într-un sistem de axe ortogonale, o șosea e situată pe o curbă de ecuație* $y = \sqrt{x+1}$ *și unește orașele A, B, C și D care au abscisele 0, 3, a și b, cu* $0 < a < b$ . *Prin orașul C este construită o autostradă care este tangentă la șosea și este paralelă cu dreapta determinată de orașele A și B.*

a) *Aflați coordonatele orașului C;*

b) *Determinați abscisa orașului D, știind că aria suprafeței de teren cuprinsă între orașele A, B și D este de 3* $(u.m)^2$.

## SOLUȚIE:

a) Află $A(0,1), B(3,2); m_{AB} = \frac{1}{3}$ ; $m_t = m_{AB,}$ ...........................................................................1p

$Definește\ f:[0,b] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1}\ funcție\ derivabilă$

$Calculează\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ; $f'(a) = \frac{1}{3}$ ......................................................................1p

$Determină\ C\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$ .................................................................................................1p

b) $Obține\ |\Delta| = 6, \Delta = \pm 6$ ........................................................................................1p

$Calculează\ \Delta = 3\sqrt{b+1} - b - 3$ ..................................................................................1p

$Cazul\ I:\ \Delta = 6 \to nu\ există\ soluții$ .................................................................................1p

$cazul\ II: \Delta = -6 \to obține\ b_1 = 0, b_2 = 6; soluție\ b = 15$ ........................................................1p

**CONCURSUL NAȚIONAL**
**DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
***"ADOLF HAIMOVICI"***

**ETAPA JUDEȚEANĂ**
**10 martie 2024**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**
**Clasa a XII–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică**

## Subiectul 1.

*Pe mulțimea* $M = [1, \infty)$ *se definește legea de compoziție asociativă*
$x * y = log_3(3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12)$.

*a) Arătați că* $x * y = log_3\big((3^x - 3)(3^y - 3) + 3\big)$ *pentru orice* $x, y \in M$.

*b) Să se rezolve în mulțimea M ecuația* $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori } x} = x$.

*c) Pe o tablă sunt scrise numerele* $\frac{\sqrt{50}}{4}, \frac{\sqrt{49}}{4}, \frac{\sqrt{48}}{4}, \dots, \frac{\sqrt{16}}{4}$. *Se șterg două numere a și b și în locul lor se trece numărul* $a * b$.

*Se continuă acest procedeu până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?*

## SOLUȚIE:

a) $3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12 = 3^x(3^y - 3) - 3(3^y - 3) + 3 = (3^x - 3)(3^y - 3) + 3$ și finalizare ..........1p

b) $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori x}} = x \Leftrightarrow log_3((3^x - 3)^{11} + 3) = x$..........1p

Obține $(3^x - 3)((3^x - 3)^{10} - 1) = 0$ ..........1p

Găsește $x = 1$ și $x = log_3 4$, care convin şi $x = log_3 2 < 1$, care nu convine..........1p

c) Demonstrează că ultimul număr este $x = log_3\big((3^{x_1} - 3)(3^{x_2} - 3) \dots (3^{x_{35}} - 3) + 3\big)$ unde $x_i, i = \overline{1,35}$ sunt numerele de pe tablă..........1p

Observă că $x_{35} = 1$..........1p

Determină x=1..........1p

## Subiectul 2.

*Se consideră polinomul* $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \in \mathbb{R}[X], n \in \mathbb{N}^*$.

*a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul* $g = (X - 1)^2$.

*b) Fie funcția* $g: [2, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{(x-1)^2}$, *unde* $\tilde{f}(x)$ *este funcția polinomială asociată polinomului f. Determinați primitiva funcției g al cărei grafic conține punctul* $M(2, 2^{n+1})$.

## SOLUȚIE:

a)Folosește schema lui Horner de două ori consecutiv și obține r=0....................................................2p
Determină câtul $q = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \cdots + 2X + 1$...............................................................1p
b) Determină primitivele funcției g: $G(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + C = x\frac{x^n-1}{x-1} + C, C \in \mathbb{R}$....2p
Din $G(2) = 2^{n+1}$ obține C=2 și finalizează.......................................................................................2p

## Subiectul 3.

*Fie* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{2sinx+3cosx} dx$ *și* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{2sinx+3cosx} dx.$

*a) Demonstrați că* $2I + 3J = \frac{\pi}{2}$.
*b) Calculați valoarea integralei J.*
*c) Să se arate că* $I \leq \frac{\pi}{4}$.

## SOLUȚIE:

a) $2I + 3J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$...............................................................................................................1p
b) Observă că $(2sinx + 3cosx)' = 2cosx - 3sinx$..........................................................................1p
Calculează $2J - 3I = ln\frac{2}{3}$..........................................................................................................1p
Determină $J = \frac{1}{13}\left(\frac{3\pi}{2} + 2ln\frac{2}{3}\right)$...........................................................................................1p
c)Consideră funcția continuă $f(x) = \frac{sinx}{2sinx+3cosx}, f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ și calculează $f'(x) = \frac{3}{(2sinx+3cosx)^2}$ .....................................................................................................................1p
Demonstrează că $f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow I \leq \frac{\pi}{4}$.....................................................................................2p

## Subiectul 4.

*Costul total de cumpărare și întreținere al unui aparat medical pentru x ani (x>1) este modelat prin funcția* $C(x) = 4000\left(30 + \int_0^x t \cdot 3^t dt\right)$, *(exprimată în RON).*
*a) Calculați costul total pentru patru ani de folosire a aparatului (aproximați ln3 cu 1).*
*b) După câți ani de folosire a aparatului suma cheltuită este egală cu* $4000(729x - 698)$.

## SOLUȚIE:

a) Calculează $\int_0^4 t \cdot 3^t dt = 244$............................................................................2p
Calculează $C(4) = 1096000$.......................................................................1p
b) Calculează $C(x) = 4000\left(31 + 3^x(x-1)\right)$..................................................................2p
Obține ecuația $(x-1)(3^x - 729) = 0$ de unde determină x=6, care convine..........................2p