Ministerul Educației   Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a X-a – soluții

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b > 0$. Determinați cea mai mică valoare posibilă a numărului real α pentru care:

$$(a+b)^x \geq a^x + b, \quad \forall x \geq \alpha.$$

Soluție. Relația din enunț este echivalentă cu:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^x - b\left(\frac{1}{a}\right)^x \geq 1, \quad \forall x \geq \alpha.$$

.... **3p**

Considerând funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1+\frac{b}{a}\right)^x - b\left(\frac{1}{a}\right)^x$, observăm că aceasta este strict crescătoare, fiind suma a două funcții strict crescătoare.................................... **2p**

Așadar, cum $f(1) = 1$, avem că $f(x) \geq f(1) = 1$, pentru orice $x \geq 1$, iar $f(x) < f(1) = 1$, pentru orice $x < 1$, adică valoarea minimă a lui α este 1. .... **2p**

Problema 2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază 1. Pentru orice $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$, notăm $s(M) = OH_1^2 + OH_2^2 + OH_3^2$, unde H_1, H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, respectiv MCA.

a) Demonstrați că dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci $s(M) = 6$, oricare ar fi $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$.

b) Demonstrați că dacă există trei puncte distincte $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$ astfel încât $s(M_1) = s(M_2) = s(M_3)$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Soluție. Considerăm un reper ortonormat cu originea în O. Pentru orice punct Z din plan vom nota cu z afixul acestuia.

a) Din relația lui Sylvester avem $h_1 = m + a + b$, $h_2 = m + b + c$ și $h_3 = m + c + a$. De asemenea, fie $h = a + b + c$ afixul ortocentrului triunghiului ABC. **1p**

Obținem:

$$s(M) = 6 + |h|^2 + 2m\overline{h} + 2\overline{m}h.$$

.... **2p**

Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci $h = a + b + c = 0$, deci $s(M) = 6$. **1p**

b) Presupunem prin absurd că triunghiul ABC nu este echilateral, ceea ce este echivalent cu $h \neq 0$. Atunci, deoarece $s(M_1) = s(M_2)$, avem:

$$|h|^2 + 2m_1\overline{h} + 2\overline{m}_1 h = |h|^2 + 2m_2\overline{h} + 2\overline{m}_2 h \Leftrightarrow \overline{h}(m_1 - m_2) + h\frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2} = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 = \frac{h}{\overline{h}}.$$

.... **2p**

Analog, obținem că $m_1 m_3 = \frac{h}{\overline{h}}$. Deoarece $m_1 \neq 0$ obținem $m_2 = m_3$, ceea ce este o contradicție cu $M_2 \neq M_3$. Așadar, triunghiul ABC este echilateral **1p**

Problema 3. Fie a, b, c numere complexe nenule de același modul pentru care numerele $A = a + b + c$ și $B = abc$ sunt reale. Demonstrați că, pentru orice număr natural n, numărul $C_n = a^n + b^n + c^n$ este real.

Soluție. Fie α, β, γ argumentele reduse ale numerelor complexe a, b, c.

Din $abc \in \mathbb{R}$ va rezulta că $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, adică $\alpha + \beta + \gamma = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, deci putem scrie $\gamma = k\pi - \alpha - \beta$ pentru un anumit k număr întreg.

Mai departe, din $a + b + c \in \mathbb{R}$ avem $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$, deci $\sin\alpha + \sin\beta = -\sin\gamma = -\sin(k\pi - \alpha - \beta)$, conducând la $|\sin\alpha + \sin\beta| = |\sin(\alpha + \beta)|$, ceea ce este echivalent cu

$$|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}| = |\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}|.$$

.... **2p**

Dacă $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, va exista q, număr întreg, astfel încât $\frac{\alpha+\beta}{2} = q\pi$, iar $\gamma = (k - 2q)\pi$, deci $\sin\gamma = 0$, ceea ce conduce la $c \in \mathbb{R}$. **1p**

Dacă $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$, atunci $|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}| = |\cos\frac{\alpha-\beta}{2}|$, de unde avem $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$, de aici rezultând $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta)$, ceea ce conduce la $\sin\alpha \sin\beta = 0$, adică cel puțin unul dintre numerele a sau b este real. **1p**

Prin urmare, cel puțin unul din numerele a, b sau c este real. Fie acesta a. Din ipoteză, vom obține că $b + c \in \mathbb{R}$, iar cum a este nenul, vom avea și $bc \in \mathbb{R}$. **1p**

Dacă b este real, atunci și c va fi real, deci C_n este real pentru orice $n \in \mathbb{N}$. **1p**

Dacă $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, atunci b și c sunt rădăcinile unei ecuații de gradul doi cu coeficienți reali, deci $b = \overline{c}$. În concluzie, $C_n = a^n + b^n + c^n = a^n + b^n + \overline{b}^n = a^n + b^n + \overline{b^n} \in \mathbb{R}$. **1p**

Soluție alternativă.

Fie $|a| = |b| = |c| = r > 0$. Pentru un număr complex z de modul $r > 0$ avem $\overline{z} = \frac{r^2}{z}$. Deoarece A este număr real, obținem că:

$$a + b + c = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{c} = r^2 \cdot \frac{ab + bc + ca}{abc} \in \mathbb{R},$$

ceea ce implică $ab + bc + ca \in \mathbb{R}$. **2p**

Pentru $n = 0$ avem $C_0 = 3$, iar pentru $n = 1$ avem $C_1 = A \in \mathbb{R}$. De asemenea, pentru $n = 2$ avem $C_2 = A^2 - 2(ab + bc + ca) \in \mathbb{R}$. **2p**

Pentru $n \geq 2$ avem relația de recurență

$$C_{n+1} = A \cdot C_n - (ab + bc + ca) \cdot C_{n-1} + B \cdot C_{n-2}.$$

Prin inducție rezultă acum că $C_n \in \mathbb{R}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **3p**

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^\star$. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:

$$f(x + y^{2n}) = f(f(x)) + y^{2n-1}f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică.

Soluție. Pentru $y = 0$, relația din enunț se reduce la $f(x) = f(f(x))$, adică relația din enunț devine:

$$f(x + y^{2n}) = f(x) + y^{2n-1}f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

. . . . **1p**

Dacă în (1) considerăm $x = 0$ și $y = 1$, atunci $f(0) = 0$. Cum ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică, are loc implicația:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0. \tag{2}$$

. . . . **1p**

Punând $x = 0$ în (1), obținem $f(y^{2n}) = y^{2n-1}f(y), \forall y \in \mathbb{R}$, adică relația (1) se rescrie:

$$f(x + y^{2n}) = f(x) + f(y^{2n}), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

. . . . **1p**

În plus, $y^{2n-1}f(y) = f(y^{2n}) = f((-y)^{2n}) = -y^{2n-1}f(-y), \forall y \in \mathbb{R}$, deci f este funcție impară. **1p**

Considerând $t = \sqrt[2n]{y} \geq 0$, obținem că relația (3) devine:

$$f(x + t) = f(x) + f(t), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \tag{4}$$

Folosind imparitatea lui f, pentru $t < 0$ obținem:

$$f(x + t) = -f(-x - t) = -(f(-x) + f(-t)) = f(x) + f(t),$$

ceea ce, împreună cu relația (4), implică:

$$f(x + t) = f(x) + f(t), \quad \forall x, t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

. . . . **1p**

Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, conform relației (5) avem $f(x_1 - x_2) = 0$, ceea ce, conform relației (2), implică $x_1 = x_2$, adică f este injectivă. Dar, deoarece $f(f(x)) = f(x)$, avem $f(x) = x$, care este soluție a ecuației date. **2p**

Remarcă: Ultimul punct din barem se acordă doar dacă este menționat faptul că soluția $f(x) = x$ verifică ecuația funcțională.