Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2024

CLASA a XI-a – soluţii

Problema 1. Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^{2023} = X^{2022}$. Demonstraţi că $X^3 = X^2$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Notăm $d = \det(X)$ şi $t = \operatorname{tr}(X)$.
Din $X^{2023} = X^{2022}$ rezultă $d^{2023} = d^{2022}$, de unde obţinem $d \in \{0, 1\}$ **2p**
Dacă $d = 1$, atunci matricea X este inversabilă, deci şi matricea X^{2022} este inversabilă. Rezultă $X = I_2$. Astfel, relaţia $X^3 = X^2$ este satisfăcută **1p**
Dacă $d = 0$, atunci din ecuaţia caracteristică satisfăcută de matricea X, rezultă $X^2 = tX$ .. **1p**
Avem $X^{n+1} = t^n X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (demonstraţie prin inducţie). Ca urmare, $t^{2022}X = t^{2021}X$, sau $t^{2021}(t-1)X = O_2$, de unde $t = 0$ sau $t = 1$ sau $X = O_2$ **1p**
Dacă $t = 0$, atunci $X^2 = O_2$, deci $X^3 = X^2 = O_2$. Dacă $t = 1$, atunci $X^2 = X$, deci $X^3 = X^2$. Dacă $X = O_2$, atunci $X^3 = X^2 = O_2$ **2p**

Problema 2. Fie un număr natural $p \geq 2$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = a > 0$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + \left[\frac{p}{x_n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent şi determinaţi limita sa în funcţie de valorile parametrului a. Notaţie: $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Soluţie. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are termenii strict pozitivi (verificare prin inducţie). Există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_k > p$. Astfel, dacă presupunem prin absurd că $x_n \leq p$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem $x_{n+1} \geq x_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $x_n \geq a + n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (inducţie). În particular, $x_{p+1} \geq a + p > p$. Contradicţie. Notăm $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}^* |\ x_k > p\}$. Cum $\left[\frac{p}{x}\right] = 0$, $\forall x > p$, deducem $x_n = x_{k_0}$, $\forall n \geq k_0$ (inducţie), deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_{k_0}$ **3p**
Determinăm în mod explicit limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ în funcţie de valorile parametrului $a > 0$.

Cazul 1. $a \in (p, \infty)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1 = a$ **1p**

Cazul 2. $a \in (0, 1)$. Atunci $x_2 = a + \left[\frac{p}{a}\right] > \left[\frac{p}{a}\right] \geq p$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_2 = a + \left[\frac{p}{a}\right]$ **1p**

Cazul 3. $a \in [1, p]$. Termenul general al şirului este de forma $x_n = \{a\} + y_n$, unde $\{a\} \in [0, 1)$ este partea fracţionară a numărului a, iar $y_n \in \mathbb{N}^*$ (inducţie). Avem $(x-1)(x-p) \leq 0$, pentru oricare $x \in [1, p]$, de unde rezultă $x + \left[\frac{p}{x}\right] \leq x + \frac{p}{x} \leq p + 1$, pentru oricare $x \in [1, p]$. Prin urmare, dacă $x_n \in [1, p]$, atunci $x_{n+1} \leq p + 1$ **1p**
Atunci $x_{k_0} \in (p, p+1] \cap \{\{a\} + k |\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_{k_0} = \begin{cases} p + \{a\}, & a \in [1, p] \setminus \mathbb{N} \\ p + 1, & a \in \{1, 2, \ldots, p\} \end{cases}$.
.... **1p**

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^T = -A$, unde A^T este transpusa matricei A.

a) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $A^2 = O_n$, arătaţi că $A = O_n$.

b) Dacă n este un număr natural impar şi există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât matricea A este adjuncta matricei B, arătaţi că $A^2 = O_n$.

Soluţie.

a) Fie $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ şi $A^2 = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Din $A^T = -A$, rezultă $a_{ji} = -a_{ij}$, pentru $i, j = 1, \ldots, n$ (matricea A este antisimetrică) **1p**

Atunci $m_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2,\ i = 1, \ldots n$. Dacă $A^2 = O_n$, atumci $m_{ii} = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Cum $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, obţinem $a_{ij} = 0$, pentru $i, j = 1, \ldots, n$. Prin urmare $A = O_n$ **2p**

b) Conform ipotezei, $A = B^*$, unde B^* este adjuncta lui B. Cum n este impar, obţinem $\det(A) = \det\left(A^T\right) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$, de unde $\det(A) = 0$. **1p**

Rezultă $\det(BB^*) = \det(B)\cdot\det(B^*) = \det(B)\cdot\det(A) = 0$. Atunci, din relaţia $BB^* = \det(B)I_n$, deducem $\det(B) = 0$, deci $\operatorname{rang}(B) \leq n-1$ şi $BB^* = O_n$ **1p**

Dacă $\operatorname{rang}(B) \leq n-2$, atunci toţi minorii de ordin $n-1$ ai matricei B sunt nuli, deci $B^* = O_n$. Prin urmare, $A^2 = (B^*)^2 = O_n$ **1p**

Dacă $\operatorname{rang}(B) = n-1$, atunci $B^* \neq O_n$, iar din inegalitatea rangurilor a lui Sylvester obţinem $\operatorname{rang}(B^*) \leq \operatorname{rang}(BB^*) + n - \operatorname{rang}(B) = 1$. Rezultă $\operatorname{rang}(B^*) = 1$, de unde $(B^*)^2 = \operatorname{tr}(B^*)B^*$. Dar $\operatorname{tr}(B^*) = \operatorname{tr}(A) = 0$ deoarece $a_{ii} = -a_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă $A^2 = (B^*)^2 = O_n$ **1p**

Problema 4. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este continuă. Presupunem că, pentru oricare numere reale $a < b < c$, există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent la b pentru care există $\lim_{n\to\infty} g(x_n)$ şi are loc relaţia

$$f(a) < \lim_{n\to\infty} g(x_n) < f(c).$$

a) Daţi un exemplu de astfel de funcţii, pentru care g este discontinuă în orice punct real.

b) Arătaţi că, dacă g este monotonă, atunci $f = g$.

Soluţie.

a) Considerăm funcţiile $f(x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, şi $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. Funcţia g este discontinuă în orice punct real. Fie numerele reale $a < b < c$. Există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere raţionale, convergent la b. Atunci $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = b \in (a, c) = (f(a), f(c))$ **2p**

b) Fie $b \in \mathbb{R}$ un punct de continuitate al funcţiei g. Demonstrăm $g(b) = f(b)$ prin reducere la absurd. Dacă $g(b) < f(b)$ atunci, pe baza continuităţii lui f în punctul b, există $a < b$ astfel încât $f(a) > g(b)$. Atunci, pentru oricare şir $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent la b, avem $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(b) < f(a)$, în contradicţie cu ipoteza. Dacă $g(b) > f(b)$ atunci, pe baza continuităţii lui f în punctul b, există $c > b$ astfel încât $f(c) < g(b)$. Rezultă că, pentru oricare şir $(x_n)_{n\geq 1}$ care converge la punctul b, avem $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(b) > f(c)$, în contradicţie cu ipoteza. Deci $g(b) = f(b)$.

În concluzie, $g(x) = f(x)$ în orice punct $x \in \mathbb{R}$ în care funcţia g este continuă............... **2p**

Funcţia monotonă g admite limite laterale finite în orice punct $x \in \mathbb{R}$ **1p**

Fie $x \in \mathbb{R}$, arbitrar. Cum mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii monotone este cel mult numărabilă, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, există $u_n \in (x - 1/n, x)$ şi $v_n \in (x, x + 1/n)$, puncte de continuitate ale funcţiei g. Atunci $\lim_{t \nearrow x} g(t) = \lim_{n\to\infty} g(u_n) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x)$ şi $\lim_{t \searrow x} g(t) = \lim_{n\to\infty} g(v_n) = \lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(x)$. Astfel, $\lim_{t \nearrow x} g(t) = \lim_{t \searrow x} g(t) = f(x)$, de unde, pe baza monotoniei lui g, rezultă $g(x) = f(x)$ **2p**

Observaţie. Funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.