**Olimpiada Națională de Matematică**

**Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024**

**CLASA a V-a – soluții**

**Problema 1.** Putem aranja primele 49 de numere naturale nenule pe o tablă $7 \times 7$, astfel încât fiecare pătrat al tablei să conțină câte un număr și orice două numere prime să nu fie vecine?

Spunem că două numere de pe tablă sunt *vecine* dacă sunt situate în pătrate diferite care au o latură comună sau un vârf comun.

*Gazeta Matematică*

*Soluție.* Se poate. Numerele prime până la 49 sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, adică 15 numere . . . . . **3p**

Numerotăm liniile și coloanele de la 1 la 7, punem numerele prime în 15 din cele 16 pătrate care au ambii indici impari, iar celelalte 34 de numere în pătratele rămase libere . . . . . . . . . . . . . . **4p**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | 3 | | 5 | | 7 |
| | | | | | | |
| 11 | | 13 | | 17 | | 19 |
| | | | | | | |
| 23 | | 29 | | 31 | | 37 |
| | | | | | | |
| 41 | | 43 | | 47 | | |

**Problema 2.** Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 2025. Trei prietene colorează numerele după cum urmează: Alexia colorează cu roșu numerele 1 și 2, apoi Bianca colorează cu galben numerele 3, 4 și 5, iar Cristina colorează cu albastru numerele 6, 7, 8 și 9; procedeul se repetă: Alexia colorează cu roșu următoarele două numere, Bianca colorează cu galben următoarele trei numere, iar Cristina colorează cu albastru cele patru numere care urmează. Prietenele continuă să coloreze până când toate numerele sunt colorate.

a) Stabiliți ce culoare va avea numărul 2024.

b) Determinați cel mai mic număr natural $n$ cu proprietatea că, după ce au fost colorate $n$ numere, suma numerelor care au fost colorate cu galben este mai mare decât 2024.

*Soluție.* a) Pentru simplitate, vom numi numerele *roșii*, *galbene*, respectiv *albastre* după culoarea pe care o capătă și *colorare completă* o secvență de 9 numere consecutive, primele două fiind roșii, următoarele trei galbene și ultimele patru albastre.

Cum $2025 = \mathcal{M}_9$, ultimele patru numere sunt albastre, deci 2024 este albastru . . . . . . . . . . **3p**

b) La colorarea completă cu numărul $k+1$ (unde $k$ este număr natural), devin galbene numerele $3 + 9 \cdot k$, $4 + 9 \cdot k$ și $5 + 9 \cdot k$, având suma $12 + 27 \cdot k$ (*punctajul complet se acordă și dacă această expresie este doar sugerată prin enumerare*) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

După 12, respectiv 13 colorări complete, suma numerelor galbene este $12 \cdot 12 + 27 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 11) = 1926$, respectiv $12 \cdot 13 + 27 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 12) = 2262$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Pentru ca suma numerelor galbene să depășească 2024, trebuie 12 colorări complete (108 numere), la care se adaugă numerele roșii 109, 110 și numărul galben 111, deci $n = 111$ . . . . **1p**

**Problema 3.** Arătați că:

a) există o infinitate de numere naturale $n$ astfel încât numărul $2 \cdot n$ este pătrat perfect, iar numărul $3 \cdot n$ este cub perfect;

b) nu există niciun număr natural $m$ astfel încât numărul $2 + m$ să fie pătrat perfect, iar numărul $3 \cdot m$ să fie cub perfect.

*Soluție.* Considerăm numerele $n = 72 \cdot a^6$, unde $a$ este număr natural . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Atunci $2 \cdot n = (12 \cdot a^3)^2$ și $3 \cdot n = (6 \cdot a^2)^3$ – o infinitate de numere $n$ care corespund . . . . **2p**

b) Dacă $3 \cdot m$ este cub perfect, atunci $3 \cdot m$ este multiplu de 27 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

În acest caz, $m$ este multiplu de 9, deci $m + 2 = \mathcal{M}_3 + 2$. Cum pătratele perfecte sunt $\mathcal{M}_3$ sau $\mathcal{M}_3 + 1$, $m + 2$ nu poate fi pătrat perfect . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

**Problema 4.** Vom spune că un număr natural $n \geqslant 5$ se numește *special* dacă, oricum am lua 5 numere distincte dintre numerele $1, 2, 3, \ldots, n$, există printre ele 4 numere distincte $a, b, c, d$ astfel încât $a + b = c + d$.

a) Arătați că $n = 6$ este special.

b) Determinați toate numerele speciale.

*Soluție.* a) Deoarece $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$, oricum am alege 5 numere dintre $1, 2, 3, 4, 5, 6$, obținem 4 numere distincte $a, b, c, d$ astfel încât $a + b = c + d = 7$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

b) Niciun număr $n \geqslant 8$ nu este special. Într-adevăr, oricum am alege 4 numere dintre $1, 2, 3, 5, 8$ nu putem să formăm sume egale: dacă nu-l alegem pe 8, atunci $5 + a > b + c$, oricum am lua $a, b, c$ dintre $1, 2, 3$, iar dacă-l alegem pe 8, atunci $8 + a > b + c$, oricum am lua $a, b, c$ dintre $1, 2, 3, 5$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

Numărul $n = 7$ este special. Într-adevăr:

- dacă nu-l alegem pe 7, pe 4 sau pe 1, atunci aplicăm raționamentul de la punctul a) sumelor $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$, $1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$, respectiv $2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$

- dacă alegem $1, 4, 7$ și două dintre numerele $2, 3, 5, 6$, atunci obținem sumele egale $1 + 4 = 3 + 2$, $1 + 5 = 2 + 4$, $1 + 7 = 2 + 6$, $1 + 7 = 3 + 5$, $3 + 7 = 4 + 6$ sau $4 + 7 = 5 + 6$ . . . . . . . . . . **2p**

Cum 5 este, evident, special, numerele speciale sunt 5, 6 și 7 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**