Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VI-a – soluții

Problema 1. Determinați numerele naturale x, y, z pentru care are loc relația

$$2^x - 2^y - 2^z = 1023.$$

Soluție. Dacă presupunem că x, y, z sunt nenule, atunci membrul stâng al egalității este număr par, deci nu poate fi egal cu 1023. Atunci cel puțin unul din numerele x, y, z este nul. **2p**

Cum $2^x = 2^y + 2^z + 1023$ deducem că $x \geq 11$, deci avem $y = 0$ sau $z = 0$. **1p**

Pentru $z = 0$ obținem $2^x - 2^y = 1024$, de unde $2^y \cdot (2^{x-y} - 1) = 2^{10}$, (1) **1p**

Cum $2^x - 2^y > 0$, avem $x > y$, deci $2^{x-y} - 1$ este impar. Din (1) rezultă că $2^y = 2^{10}$ și $2^{x-y} - 1 = 1$, de unde $y = 10$ și $x = 11$ **2p**

În mod analog se procedează pentru $y = 0$, deci soluțiile problemei sunt $x = 11, y = 10, z = 0$ sau $x = 11, y = 0, z = 10$. **1p**

Problema 2. a) Arătați că numerele $12n + 13$ și $13n + 14$ sunt prime între ele pentru orice număr natural n.

b) Determinați numărul perechilor (a, b) de numere naturale pentru care există un număr natural n astfel încât $\dfrac{a}{b} = \dfrac{12n + 13}{13n + 14}$ și $17a + 19b < 2024$.

Soluție. a) Dacă d este un divizor comun al numerelor $12n + 13$ și $13n + 14$, atunci d divide numerele $13(12n + 13)$ și $12(13n + 14)$. **1p**

Deducem că d divide pe $13(12n + 13) - 12(13n + 14)$, adică $d \mid 1$. Așadar, $d = 1$, deci numerele $12n + 13$ și $13n + 14$ sunt prime între ele. **1p**

b) Relația $\dfrac{a}{b} = \dfrac{12n + 13}{13n + 14}$ conduce la $a(13n + 14) = b(12n + 13)$, deci $13n + 14 \mid b(12n + 13)$. Deoarece numerele $12n + 13$ și $13n + 14$ sunt prime între ele, rezultă că $13n + 14$ divide pe b. Cum $b \neq 0$ (fiind numitorul unei fracții), există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b = k(13n + 14)$ și atunci $a = k(12n + 13)$ **1p**

Înlocuind $a = k(12n + 13)$ și $b = k(13n + 14)$ în relația $17a + 19b < 2024$, obținem $k(451n + 487) < 2024$. Atunci $451n + 487 < 2024$, de unde $n \leq 3$ **1p**

Pentru $n = 0$ obținem $k \leq 4$, deci $(a, b) \in \{(13, 14), (26, 28), (39, 42), (52, 56)\}$........... **1p**

Pentru $n = 1$ obținem $k \leq 2$, deci $(a, b) \in \{(25, 27), (50, 54)\}$. **1p**

Pentru $n \in \{2, 3\}$ obținem $k = 1$, deci $(a, b) \in \{(37, 40), (49, 53)\}$. **1p**

Problema 3. Spunem că numerele naturale nenule m și n au proprietatea P dacă pentru orice divizor d_1 al lui m și orice divizor d_2 al lui n, numărul $d_1 + d_2$ este prim.

a) Arătați că dacă m și n au proprietatea P și sunt diferite, atunci numărul $m + n$ este impar.

b) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m \leqslant n$, care au proprietatea P.

Soluție. a) Analizăm problema pentru $1 \leq m < n$, cazul $m > n$ tratându-se analog.

- Dacă m și n sunt impare, atunci $m \geq 1$ și $n \geq 3$. Luând $d_1 = 1$ și $d_2 = n$ se obține $d_1 + d_2 = n + 1$, care este număr par mai mare sau egal cu 4, deci compus, nu convine.**1p**

- Dacă m și n sunt pare, pentru $d_1 = 2$ și $d_2 = 2$ se obține $d_1 + d_2 = 4$, care este număr compus, nu convine. **1p**

În concluzie m și n au parități diferite, deci $m + n$ este număr impar.

b) Dacă $m = n$, atunci alegând $d_1 = m$ și $d_2 = n$ obținem $d_1 + d_2 = 2m$ care trebuie să fie prim, deci $m = n = 1$. **1p**

Dacă $m < n$, atunci sunt diferite și conform punctului anterior m și n au parități diferite.

- Dacă m par și n impar, atunci $m \geq 2$ și $n \geq 3$, și alegând $d_1 = 1$ și $d_2 = n$ obținem $d_1 + d_2 = n + 1 \geq 4$, care este număr par, deci compus, nu convine....................**1p**

- dacă m impar și n par, atunci $m \geq 1$ și $n \geq 2$ și fie $a \in \mathbb{N}^*$ și b impar astfel încât $n = 2^a \cdot b$.

  - Pentru $a \geq 3$ rezultă 8 divide pe n și alegând $d_1 = 1$ și $d_2 = 8$ obținem $d_1 + d_2 = 9$, care este compus, deci nu convine. **1p**
  - Pentru $a = 1$ rezultă $n = 2b$, cu b impar.
    - Dacă $b \geq 3$, impar, atunci alegem $d_1 = 1$ și $d_2 = b$ și obținem $d_1 + d_2 = b + 1 \geq 4$ număr par, deci compus, și nu convine.
    - Dacă $b = 1$ obținem $n = 2$ și cum $m < n$, m impar, deducem că $m = 1$, iar soluția $(m, n) = (1, 2)$ verifică proprietățile din enunț........................**1p**
  - Pentru $a = 2$ rezultă $n = 4b$, cu b impar.
    - Dacă $b \geq 3$, impar, atunci alegem $d_1 = 1$ și $d_2 = b$ și obținem $d_1 + d_2 = b + 1 \geq 4$ număr par, deci compus, și nu convine.
    - Dacă $b = 1$ obținem $n = 4$ și cum $m < n$, m impar, deducem că $m \in \{1, 3\}$, doar soluția $(m, n) = (1, 4)$ verificând proprietățile din enunț. **1p**

În concluzie, soluțiile sunt $(1, 1), (1, 2), (1, 4)$.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 54°$ și $\sphericalangle ACB = 45°$. Fie punctele D pe segmentul BC și E pe segmentul AD astfel încât $AD = AB$ și $BE = BD$. Notăm cu F intersecția dintre BE și AC, și fie DM bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADF$, unde $M \in AC$. Perpendiculara dusă din C pe AB intersectează DM în G.

Arătați că:

a) triunghiul ABF este isoscel;

b) $CG = CM$.

Soluție. a) Avem pe rând $\sphericalangle ABC = 81°$, iar în triunghiul isoscel ABD, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD = 81°$, astfel că $\sphericalangle DAB = 18°$ și $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB - \sphericalangle DAB = 36°$...........................**1p**

În triunghiul BED isoscel avem $\sphericalangle BED = \sphericalangle BDE = 81°$, astfel că $\sphericalangle DBE = 18°$, de unde rezultă $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC - \sphericalangle EBD = 63°$. **1p**

În triunghiul ABF avem $\sphericalangle ABF = 63°$ și $\sphericalangle FAB = 54°$ astfel că $\sphericalangle AFB = 63°$, adică triunghiul ABF este isoscel cu $AF = AB$. **1p**

b) Deoarece $AD = AB$ și $AF = AB$ deducem că $AF = AD$, adică triunghiul AFD este isoscel cu $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF = \dfrac{180^\circ - \sphericalangle FAD}{2} = 72^\circ$. **1p**

Deoarece DM este bisectoarea unghiului ADF rezultă $\sphericalangle ADM = \sphericalangle FDM = \dfrac{\sphericalangle ADF}{2} = 36^\circ$. În triunghiul AMD avem $\sphericalangle MAD = \sphericalangle ADM = 36^\circ$ astfel că $\sphericalangle CMD = 72^\circ$. **1p**

Deoarece CG este perpendiculară pe AB rezultă $\sphericalangle ACG = 90^\circ - \sphericalangle CAB = 36^\circ$. **1p**

Astfel în triunghiul CMG avem $\sphericalangle ACG = 36^\circ$ și $\sphericalangle CMG = 72^\circ$. Se obține $\sphericalangle CGM = 72^\circ$, adică triunghiul CMG este isoscel cu $CG = CM$. **1p**