



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a IX-a – Soluții

Problema 1. Fie patrulaterul convex $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul O . Dacă $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AO} = \vec{BC} + \vec{DC} + \vec{OC}$, arătați că $ABCD$ este un paralelogram.

Gazeta Matematică

Soluția 1. Aplicând regula triunghiului deducem $\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{AO} + \vec{OD} + \vec{AO} = \vec{BO} + \vec{OC} + \vec{DO} + \vec{OC} + \vec{OC}$, adică $2 \cdot (\vec{OB} + \vec{OD}) = 3 \cdot (\vec{OA} + \vec{OC})$ **2p**

Cum vectorii \vec{OB} și \vec{OD} , respectiv \vec{OA} și \vec{OC} , sunt coliniari, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{OB} + \vec{OD} = \alpha \cdot \vec{OB}$ și $\vec{OA} + \vec{OC} = \beta \cdot \vec{OA}$. Atunci $2\alpha \cdot \vec{OB} = 3\beta \cdot \vec{OA}$ și, cum vectorii \vec{OA} și \vec{OB} sunt necoliniari, rezultă că $\alpha = \beta = 0$ **3p**

Conchidem că $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ și $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$, deci O este mijlocul fiecăreia dintre diagonale, așadar $ABCD$ este un paralelogram. **2p**

Soluția 2. Dacă M și N sunt mijloacele diagonalelor BD , respectiv AC , relația din enunț se scrie sub forma $2 \cdot \vec{AM} + \vec{AO} = 2 \cdot \vec{MC} + \vec{OC}$ **2p**

Deducem că $2 \cdot (\vec{AM} + \vec{CM}) = \vec{OC} + \vec{OA}$, sau $4 \cdot \vec{NM} = 2 \cdot \vec{ON}$ **3p**

Rezultă că punctele M , N și O sunt coliniare, ceea ce se întâmplă doar dacă $M = N = O$. Astfel, punctul O este mijlocul fiecăreia dintre diagonale, prin urmare $ABCD$ este un paralelogram. **2p**

Problema 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = \frac{1}{2}$ și $2n \cdot a_{n+1} = (n+1)a_n$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

a) Stabiliți formula termenului general a_n al șirului, unde n este un număr natural nenul.

b) Dacă $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, arătați că numerele $\{b_n\}$, $\{b_{n+1}\}$ și $\{b_{n+2}\}$ nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru niciun număr natural nenul n .

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x .)

Soluție. a) Avem $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n . Înseamnă că șirul

$\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică de rație $\frac{1}{2}$, prin urmare $\frac{a_n}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, oricare ar fi numărul natural nenul n . Deducem că $a_n = \frac{n}{2^n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

Altfel: se determină primii termeni ai șirului, se formulează ipoteza că $a_n = \frac{n}{2^n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n și se demonstrează acest fapt prin inducție completă. **3p**

b) Avem:

$$b_n = 2b_n - b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

oricare ar fi numărul natural nenul n .

Observăm că $\{b_1\} = \frac{1}{2}$, iar $\{b_2\} = 0$.

Pentru $n = 3$, $2^3 > 3 + 2$; dacă presupunem că $2^k > k + 2$ pentru un anumit $k \geq 3$, atunci $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (k + 2) = 2k + 4 > (k + 1) + 2$. În concluzie, $2^n > n + 2$ pentru orice număr natural $n \geq 3$. Rezultă că $\{b_n\} = 1 - \frac{n+2}{2^n}$, $\forall n \geq 3$ **2p**

Presupunem, prin absurd, că $\{b_n\}$, $\{b_{n+1}\}$ și $\{b_{n+2}\}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru un număr natural $n \geq 3$. Observând că $\{b_n\} \leq \{b_{n+1}\} \leq \{b_{n+2}\}$ (deci ordinea celor trei numere în progresie este bine determinată), obținem că

$$\frac{n+2}{2^n} + \frac{n+4}{2^{n+2}} = \frac{n+3}{2^n} \Leftrightarrow 5n + 12 = 4n + 12,$$

fals. Pentru $n = 1$ și $n = 2$, numerele $\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{3}{8}$, respectiv 0 , $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, nu sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. **2p**

Notă. Dacă sunt omise cazurile $n = 1$ și $n = 2$, se va scădea **1p**.

Problema 3. Se consideră numărul natural compus n și $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$ divizorii naturali ai lui n , unde $k \geq 3$. Dacă toate ecuațiile $d_{i+2}x^2 - 2d_{i+1}x + d_i = 0$, unde $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$, au soluții reale, arătați că există un număr prim p astfel încât $n = p^{k-1}$.

Soluție. Avem că

$$4d_{i+1}^2 - 4d_{i+2} \cdot d_i \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d_{i+1}}{d_i} \geq \frac{d_{i+2}}{d_{i+1}} \quad (*),$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ **1p**

Cum d_2 este cel mai mic divizor propriu al lui n , înseamnă că numărul $\frac{n}{d_2}$ este cel mai mare divizor propriu al lui n , așadar $\frac{n}{d_2} = d_{k-1}$.

Avem:

$$\frac{n}{d_2} = d_{k-1} = \prod_{i=1}^{k-2} \frac{d_{i+1}}{d_i} \geq \prod_{i=1}^{k-2} \frac{d_{i+2}}{d_{i+1}} = \frac{n}{d_2}.$$

Rezultă că toate inegalitățile (*) se transformă în egalități. **3p**

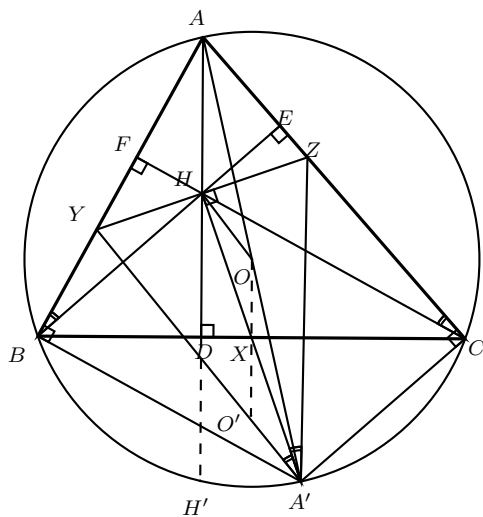
Deducem că $d_{i+1}^2 = d_{i+2} \cdot d_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$. Atunci numerele $1 = d_1, d_2, d_3, \dots, d_k = n$ (în această ordine) sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice de rație d_2 , așadar $n = d_2^{k-1}$ **2p**

Cel mai mic divizor propriu al numărului compus n este un număr prim: $d_2 = p$, cu p număr prim, iar $n = p^{k-1}$ **1p**

Problema 4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și X mijlocul laturii BC . Perpendiculara în H pe HX taie laturile (AB) și (AC) în punctele Y , respectiv Z . Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cu O' centrul cercului circumscris triunghiului BHC .

- Arătați că $HY = HZ$.
- Demonstrați că $\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AZ} = 2\overrightarrow{OO'}$.

Soluție.



a) Fie A' punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului. Se știe că H și A' sunt simetrice față de X , deci H , X și A' sunt coliniare. Atunci $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle ACA' = 90^\circ$.

Astfel, patrulaterul $A'BYH$ și $A'CZH$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle YBH = \sphericalangle YA'H$ și $\sphericalangle ZCH = \sphericalangle ZA'H$ **2p**

Pe de altă parte, din triunghiurile dreptunghice BEA și CFA avem $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACF = 90^\circ - \sphericalangle BAC$. (E și F sunt picioarele înălțimilor triunghiului ABC duse din B respectiv C)

..... **1p**

În consecință $\sphericalangle YA'H = \sphericalangle ZA'H$, de unde rezultă că $A'H$ este în același timp înălțime și bisectoare în triunghiul $YA'Z$, deci este și mediană, adică $HY = HZ$ **1p**

b) Din punctul a) rezultă că $\vec{AZ} + \vec{AY} = 2\vec{AH}$ **1p**

Se știe că simetricul H' al ortocentului H față de latura BC se află pe cercul circumscris triunghiului ABC , deci simetricul cercului circumscris triunghiului BHC față de BC este cercul circumscris triunghiului $BH'C$, adică cercul circumscris triunghiului ABC .

Astfel, centrul cercului circumscris triunghiului BHC este simetricul lui O față de BC .

..... **1p**

Deducem că $\vec{OO'} = 2\vec{OX} = \vec{AH}$, deoarece OX este linie mijlocie în triunghiul $HA'A$. De aici rezultă $\vec{AZ} + \vec{AY} = 2\vec{OO'}$ **1p**