Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 2 - 4i$. Arătați că $i \cdot z_1 + z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Determinați numerele reale a pentru care punctul $A(a,5)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x-5) = \log_6(x+1) + \frac{1}{\log_x 6}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(2,4)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OB și AC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 6$, $BC = 10$ și $\cos B = \frac{4}{5}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 1$.

5p **b)** Arătați că $A - B(x) \cdot A = xI_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A \cdot C(x) = B(x)$. Arătați că $C(x) - C(y) = (y - x)A$, pentru orice numere reale x și y.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y + xy^2 + x + y$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 16$.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{2}{x} = 9x$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m \le n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)-e^x\right)dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\ln(e+1)$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\frac{2}{e}$.