Ministerul Educației și Cercetării

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2025

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a X-a – soluţii

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\log_7(6^x+1)=\log_6(7^x-1).$$

Gazeta Matematică

Soluţia 1. Notând $\log_7(6^x+1)=\log_6(7^x-1)=y$, obţinem sistemul $6^x+1=7^y$ şi $7^x-1=6^y$. **2p**

Prin adunare deducem că $6^x+7^x=6^y+7^y$. Din injectivitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6^x+7^x$ (care este strict crescătoare, ca sumă de două funcţii strict crescătoare), obţinem că $x=y$. **2p**

Determinarea lui x se reduce la rezolvarea ecuaţiei $6^x+1=7^x$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$. Considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x$; relaţia precedentă se scrie sub forma $g(x)=g(1)$. Ţinând cont de injectivitatea funcţiei g (care este strict descrescătoare, ca sumă de două funcţii strict descrescătoare), conchidem că $x=1$, valoare care verifică ecuaţia din enunţ. **3p**

Soluţia 2. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=\log_7(6^x+1)$. Se arată că funcţia f este inversabilă, cu inversa $f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\log_6(7^x-1)$. **2p**

Ecuaţia dată devine $f(x)=f^{-1}(x)$, iar aceasta este echivalentă cu $f(x)=x$, unde $x\in(0,\infty)$. **2p**

Determinarea lui x se reduce la rezolvarea ecuaţiei $6^x+1=7^x$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$. Considerăm funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x$; relaţia precedentă se scrie sub forma $g(x)=g(1)$. Ţinând cont de injectivitatea funcţiei g (care este strict descrescătoare, ca sumă de două funcţii strict descrescătoare), conchidem că $x=1$ este unica soluţie soluţie a ecuaţiei din enunţ. **3p**

Problema 2. Aflaţi numerele reale x pentru care

$$3^x+3^{[x]}+3^{\{x\}}=4.$$

($[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară ale numărului real x.)

Soluţie. Nu există numere $x\in[1,\infty)$ cu proprietatea din enunţ: dacă $x\geq 1$, atunci $[x]\geq 1$ şi, cum $\{x\}\in[0,1)$, obţinem $4=3^x+3^{[x]}+3^{\{x\}}\geq 3+3+1=7$, fals. **1p**

Nu există nici numere $x \in (-\infty, -1)$ cu proprietatea din enunţ: dacă $x < -1$, atunci $[x] \leq -2$ şi, cum $\{x\} \in [0, 1)$, obţinem $4 = 3^x + 3^{[x]} + 3^{\{x\}} < 3^{-1} + 3^{-2} + 3^1 = 3\frac{4}{9}$, fals. **2p**

Dacă $x \in [0, 1)$, atunci $[x] = 0$, $\{x\} = x$, deci egalitatea dată devine $3^x + 1 + 3^x = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 3$. Obţinem soluţia $x_1 = 1 - \log_3 2$, care aparţine intervalului $[0, 1)$. **2p**

Dacă $x \in [-1, 0)$, atunci $[x] = -1$, $\{x\} = x + 1$, deci egalitatea dată devine $3^x + \frac{1}{3} + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x = \frac{11}{3}$. Obţinem soluţia $x_2 = \log_3 \frac{11}{12}$, care aparţine intervalului $[-1, 0)$.

În concluzie, există două numere reale, x_1 şi x_2, care au proprietatea din enunţ. **2p**

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că

$$|wf(z) + zf(w)| = 2|zw|$$

pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$.

Soluţie. Dacă f este o funcţie cu proprietatea din enunţ, luând $z = 1$ şi $w = 0$ în relaţia dată, deducem că $f(0) = 0$. Pentru $w = z \in \mathbb{C}^*$ obţinem că $|f(z)| = |z|$; cum această egalitate se verifică şi pentru $z = 0$, rezultă că $|f(z)| = |z|$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. **2p**

Atunci $|f(1)| = 1$ şi, pentru $w = 1$ în ecuaţia funcţională, obţinem

$$2|z| = |f(z) + zf(1)| \leq |f(z)| + |zf(1)| = 2|z|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$. **2p**

Rezultă că avem egalitate în inegalitatea triunghiului. Prin urmare, pentru fiecare $z \in \mathbb{C}$, există $t_z \in \mathbb{R}$, $t_z \geq 0$ (t_z depinde de z), astfel încât $f(z) = t_z \cdot f(1)z$. Trecând la modul şi simplificând, deducem că $|f(z)| = t_z \cdot 1 \cdot |z| \Leftrightarrow 1 = t_z$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}^*$.

În concluzie, $f(z) = cz$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, unde $c = f(1)$ este un număr complex de modul 1. .... **2p**

Se verifică imediat faptul că orice funcţie de forma $f(z) = cz$, unde $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, este soluţie a ecuaţiei funcţionale din enunţ. **1p**

Problema 4. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex cu $\angle A \equiv \angle C \equiv \angle E$ şi $\angle B \equiv \angle D \equiv \angle F$.

a) Demonstraţi că există un unic punct în plan care este egal depărtat de laturile AB, CD şi EF ale hexagonului.

b) Dacă notăm cu P punctul de la a), iar $G_1 \neq G_2$ sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ACE respectiv BDF, arătaţi că $\measuredangle G_1PG_2 = 60°$.

Soluţie.

a) Dacă notăm $\measuredangle A = \measuredangle C = \measuredangle E = \alpha$ şi $\measuredangle B = \measuredangle D = \measuredangle F = \beta$, atunci suma măsurilor unghiurilor hexagonului $ABCDEF$ este $3\alpha + 3\beta = 720°$, aşadar $\alpha + \beta = 240°$.

.... **1p**

Deoarece $\measuredangle B + \measuredangle C = \alpha + \beta = 240°$, dreptele AB şi CD se vor intersecta într-un punct situat în exteriorul hexagonului. Analog pentru dreptele CD şi EF, respectiv EF şi AB.

Notăm $\{X\} = AB \cap CD, \{Y\} = CD \cap EF$, $\{Z\} = EF \cap AB$. Centrul cercului înscris în triunghiul XYZ este unicul punct egal depărtat de laturile AB, CD şi EF ale hexagonului.

.... **2p**

b) Triunghiul XYZ are toate unghiurile de $60°$, deci este echilateral, iar P este centrul său. În planul complex, considerăm un reper cu originea în P şi notăm cu literă mică afixul unui punct notat, corespunzător, cu litera mare. Din asemănarea $\Delta BCX \sim \Delta DEY \sim \Delta FAZ$ (u.u.), deducem că există $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ astfel încât

$$\frac{c-x}{b-x} = \frac{e-y}{d-y} = \frac{a-z}{f-z} = k \cdot \epsilon,$$

unde $\epsilon = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}$.

Obţinem că $c - x = (b - x)k \cdot \epsilon,\ e - y = (d - y)k \cdot \epsilon,\ a - z = (f - z)k \cdot \epsilon$.
.... **2p**

Deoarece $p = \frac{x+y+z}{3} = 0$, prin adunare, deducem $c+e+a = (b+d+f)\cdot k\cdot\epsilon \Leftrightarrow g_1 = g_2\cdot k\cdot\epsilon$.

Din ipoteza că $G_1 \neq G_2$ rezultă că g_1 şi g_2 nu pot fi 0, deci G_1, G_2, P sunt puncte distincte două câte două.

Aşadar $\frac{g_1 - p}{g_2 - p} = k \cdot \epsilon$, adică $\measuredangle G_1PG_2 = 60°$. **2p**