



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a XI-a – soluții

Problema 1. Fie șirul (an)n≥1 cu a1 = 1 și an+1 = an / (1 + sqrt(1 + an)), pentru orice n ∈ N*.

Arătați că lim(n→∞) an / an+1 = lim(n→∞) sum(k=1 to n) log2(1 + ak) = 2.

Gazeta Matematică

Soluție. Avem an > 0, ∀n ∈ N* (inducție) și an+1 < an, ∀n ∈ N*. Rezultă că șirul (an)n≥1 este convergent, cu limita ℓ ∈ [0, 1). Trecând la limită în relația de recurență, obținem ℓ = ℓ / (1 + sqrt(1 + ℓ)), de unde ℓ = 0..... 1p

Rezultă lim(n→∞) an / an+1 = lim(n→∞) (1 + sqrt(1 + an)) = 2..... 1p

Din relația de recurență rezultă 1 + an+1 = sqrt(1 + an), ∀n ∈ N*..... 2p

Atunci log2(1 + an+1) = 1/2 log2(1 + an), ∀n ∈ N*. Cum log2(1 + a1) = log2 2 = 1, obținem log2(1 + an) = 1 / 2^(n-1), ∀n ∈ N* (progresie geometrică cu primul termen 1 și rația 1/2)..... 1p

Atunci lim(n→∞) sum(k=1 to n) log2(1 + ak) = lim(n→∞) sum(k=1 to n) 1 / 2^(k-1) = 2..... 2p

Problema 2. Fie n ∈ N, n ≥ 3. Spunem că o matrice A ∈ Mn(C) are proprietatea (P) dacă det(A + Xij) = det(A + Xji), oricare ar fi i, j ∈ {1, 2, ..., n}, unde Xij ∈ Mn(C) este matricea care are 1 pe poziția (i, j) și 0 în rest.

a) Arătați că dacă A ∈ Mn(C) are proprietatea (P) și det(A) ≠ 0, atunci A = AT.

b) Dați un exemplu de matrice A ∈ Mn(C) care are proprietatea (P), dar A ≠ AT.

Soluție.

a) Fie i, j ∈ {1, 2, ..., n}. Prin dezvoltare după linia i, obținem det(A + Xij) = det(A) + δij, unde δij este complementul algebric al elementului de pe poziția (i, j) al matricei A..... 1p

Cum A are proprietatea (P), rezultă δij = δji, ∀i, j ∈ {1, 2, ..., n}, deci A* (adjuncta lui A) este matrice simetrică..... 1p

Notăm d = det(A) ≠ 0. Avem AA* = dIn = (dIn)T = (A*A)T = AT(A*)T = AT A*..... 2p

Cum d det(A*) = det(AA*) = det(dIn) = d^n, iar d ≠ 0, rezultă că matricea A* este inversabilă. Atunci, din relația AA* = AT A*, rezultă A = AT..... 1p

b) Considerăm A ∈ Mn(C), matricea care are 1 pe pozițiile (1,1) și (1,2) și 0 în rest. Cum n ≥ 3, matricea A + Xij are cel puțin o linie nulă, deci det(A + Xij) = 0, oricare ar fi i, j ∈ {1, 2, ..., n}. Rezultă că A are proprietatea (P), dar A ≠ AT..... 2p

Problema 3. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă și bijectivă, astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} = 1.$$

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, pentru oricare $a > 0$.

b) Dați un exemplu de funcție f care satisface condițiile din enunț.

Soluție.

a) Avem $f(0) = 0$ (reducere la absurd). Atunci, pe baza ipotezei, deducem că f este strict crescătoare, cu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, iar $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ este strict crescătoare, cu $f^{-1}(0) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = \infty$ **1p**

Limita din ipoteză asigură existența unui număr $u > 0$ astfel încât $\frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} > \frac{1}{2}, \forall x > u$.

Rezultă $\frac{f(x)}{x} > f\left(\frac{x}{2}\right), \forall x > u$. Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2}\right) = \infty$, obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ **2p**

Fie $a > 0$, arbitrat, fixat.

Cazul $a = 1$ este clar.

Cazul $a \in (0, 1)$. Există $t > 0$ astfel ca $f^{-1}(x) > \frac{1}{a}, \forall x > t$. Rezultă

$$f^{-1}(x) > f^{-1}(ax) = f^{-1}(af(f^{-1}(x))) > f^{-1}\left(\frac{f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)}\right), \forall x > t.$$

Obținem

$$\frac{f^{-1}(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)} < \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} < 1, \forall x > t.$$

Pe baza ipotezei și condiției $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = \infty$, obținem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)} \stackrel{y=f^{-1}(x)}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(y)/y)}{y} = 1.$$

Atunci, conform *criteriului clește*, rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$.

Cazul $a \in (1, \infty)$. Atunci $b = 1/a \in (0, 1)$. Conform cazului anterior, avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{-1}(b(ax))}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1, \forall a > 0$ **2p**

b) Exemplu. Funcția bijectivă $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = e^x - 1, x \in [0, \infty)$, cu inversa $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \ln(x + 1)$ satisface condițiile din enunț **2p**

Problema 4. Determinați toate tripletele de matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{aligned} A &= BC - CB \\ B &= CA - AC \\ C &= AB - BA \end{aligned}$$

Soluția 1. Dacă una dintre matricele A, B, C este nulă, atunci $A = B = C = O_2$ **1p**
 Presupunem că există matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ care satisfac ecuațiile din enunț.

Din $\text{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\text{tr}(A) = 0$. Similar, $\text{tr}(B) = \text{tr}(C) = 0$ **1p**

Din ecuația $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, rezultă $A^2 = aI_2$, unde $a = -\det(A)$.

Similar, $B^2 = bI_2$ și $C^2 = cI_2$, cu $b = -\det(B)$ și $c = -\det(C)$ **1p**

Înmulțind ecuația $A = BC - CB$ cu B la stânga și respectiv la dreapta, obținem relațiile
 $BA = B^2C - BCB = bC - BCB$ și $AB = BCB - CB^2 = BCB - bC$. Atunci $AB + BA = O_2$,

iar din ecuația $C = AB - BA$, rezultă $C = 2AB$. Similar, $A = 2BC$ și $B = 2CA$ **1p**

Atunci $A = -2CB = -2C(2CA) = -4C^2A = -4cA$. Similar, $B = -4aB$ și $C = -4bC$ **1p**

Cum matricele A, B și C sunt presupuse nenule, obținem $a = b = c = -1/4$, deci avem

$\det(A) = \det(B) = \det(C) = 1/4$. Rezultă că matricele A și B sunt de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$

și $B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & -s \end{pmatrix}$, cu $x, y, z, s, t, u \in \mathbb{R}$, astfel încât $x^2 + yz = -1/4$ și $s^2 + tu = -1/4$.

Din relația $AB + BA = O_2$ rezultă $2xs = -(yu + zt)$. Obținem:

$$4x^2s^2 = (yu + zt)^2 = (yu - zt)^2 + 4yztu \geq 4(yz)(tu) = 4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Dar $x^2s^2 < \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)$, $\forall x, s \in \mathbb{R}$. Contradicție.

Prin urmare, soluția unică a sistemului din enunț este $A = B = C = O_2$ **2p**

Soluția 2. Fie trei matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac sistemul de ecuații din enunț.

Din $\text{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\text{tr}(A) = 0$. Similar, $\text{tr}(B) = \text{tr}(C) = 0$ **1p**

Atunci $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & -c_1 \end{pmatrix}$, cu $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

..... **1p**

Obținem $BC - CB = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & 2(b_1c_2 - b_2c_1) \\ 2(b_3c_1 - b_1c_3) & -(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$ **1p**

Deci $a_2 = 2(b_1c_2 - b_2c_1)$, de unde $a_2^2 = 2a_2(b_1c_2 - b_2c_1) = 2a_2b_1c_2 - 2a_2b_2c_1$. Similar, obținem:
 $b_2^2 = 2b_2c_1a_2 - 2b_2c_2a_1$ și $c_2^2 = 2c_2a_1b_2 - 2c_2a_2b_1$. Rezultă $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0$. Cum $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$,
 obținem: $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ **2p**

Analog arătam $a_3 = b_3 = c_3 = 0$. Atunci $a_1 = b_2c_3 - b_3c_2 = 0$. Similar, $b_1 = c_1 = 0$.

Prin urmare, soluția unică a sistemului din enunț este $A = B = C = O_2$ **2p**