Ministerul Educației și Cercetării
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a XII-a – soluţii

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup, cu elementul neutru e, iar A o submulţime nevidă a sa. Notăm cu $AA = \{xy|\, x, y \in A\}$.
a) Arătaţi că dacă G este finit, atunci $AA = A$ dacă şi numai dacă $e \in A$ şi $|AA| = |A|$.
b) Daţi un exemplu de grup G şi o submulţime $A \subseteq G$, cu $AA \neq A$, $|AA| = |A|$ şi $AA < G$.
(Notaţia $H < G$ înseamnă că H este un subgrup propriu al grupului G, adică un subgrup al lui G diferit de grupul G.)

Gazeta Matematică

Soluţie.
a) Dacă $AA = A$, atunci $|AA| = |A|$. Pentru orice $x \in A$ avem că $|xA| = |A| < \infty$ şi $xA \subseteq AA = A$, astfel că $xA = A$. Dar atunci $x \in xA$, astfel că $e = x^{-1} \cdot x \in x^{-1} \cdot xA = A$.
.... **2p**
Reciproc, dacă $e \in A$ şi $|AA| = |A|$, avem că $A = e \cdot A \subseteq AA$ şi cum $|A| = |AA| < \infty$, rezultă că $AA = A$. **2p**
b) Fie $G = U_4 = \{1, i, -1, -i\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 4 ale unităţii. Considerând $A = \{i, -i\}$, avem că $AA = \{i^2, i \cdot (-i), (-i)^2\} = \{1, -1\} = U_2 < U_4$, $|AA| = 2 = |A|$ şi $AA \neq A$ (mai mult, $AA \cap A = \emptyset$). .... **3p.**

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup, iar $H < G$ un subgrup propriu al lui G. Dacă există morfisme $f, g, h : G \longrightarrow G$ ale grupului G, cu proprietatea că $f(xy) = g(x)h(y)$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, arătaţi că:
a) $g = h$;
b) dacă G este neabelian, iar $H = Z(G)$, atunci $f = g = h$.
(Mulţimea $Z(G) = \{c \in G|\, cx = xc, \forall x \in G\}$ se numeşte centrul grupului G.)

Soluţie.
a) Notând cu e elementul neutru al grupului G, pentru orice $x \in G \setminus H$ avem că $x^{-1} \in G \setminus H$, astfel că

$$e = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = g(x) \cdot h(x^{-1}) = g(x) \cdot h(x)^{-1},$$

de unde rezultă că $g(x) = h(x)$ pentru orice $x \in G \setminus H$. **2p**
Pentru orice $a \in H$, alegând un $x \in G \setminus H$ avem că $ax, x^{-1} \in G \setminus H$, astfel că:

$$g(a) = g(ax \cdot x^{-1}) = g(ax) \cdot g(x^{-1}) = h(ax) \cdot h(x^{-1}) = h(ax \cdot x^{-1}) = h(a).$$

Rezultă deci că $g = h$. **2p**
b) Fie G neabelian şi $H = Z(G)$. Ţinând cont de punctul anterior avem că $g = h$, astfel că relaţia din enunţ devine

$$f(xy) = g(x)g(y) = g(xy) \qquad \text{pentru orice } x, y \in G \setminus Z(G).$$

Pentru orice $a \in Z(G)$ şi $x \in G \setminus Z(G)$, avem $ax, x^{-1} \in G \setminus Z(G)$, astfel că:

$$f(a) = f(ax \cdot x^{-1}) = g(ax \cdot x^{-1}) = g(a).$$

.... **1p**
Fie $x \in G \setminus Z(G)$. Atunci există $y \in G \setminus Z(G)$ cu proprietatea că $xy \neq yx$. Dacă $xy \in Z(G)$ atunci am avea

$$xy = y(xy)y^{-1} = yx \neq xy,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Prin urmare, $xy \in G \setminus Z(G)$, şi, cum $y^{-1} \in G \setminus Z(G)$, avem:

$$f(x) = f(xy \cdot y^{-1}) = g(xy \cdot y^{-1}) = g(x).$$

Rezultă că $f = g$ şi deci $f = g = h$. **2p**

Problema 3. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere reale, cu $a < b$, iar $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă cu proprietatea că $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Arătaţi că $f(a) \cdot f(b) < 0$.
b) Determinaţi şirurile convergente $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, pentru care există o funcţie strict monotonă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx\,, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Soluţie.
a) Dacă $f([a, b]) \subseteq [0, \infty)$ sau $f([a, b]) \subseteq (-\infty, 0]$, atunci $m = \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| > 0$, iar pe unul dintre intervalele $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ sau $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ are loc inegalitatea $|f(x)| > m$ pentru orice x din acel interval. Atunci

$$0 = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,dx \geq m \cdot \frac{b-a}{2} > 0\,,$$

ceea ce este imposibil. Rezultă că $f(a) \cdot f(b) < 0$. **1p**
b) Vom arăta că singurele şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ care verifică condiţia din enunţ sunt şirurile constante şi şirurile care iau exact două valori reale distincte şi care devin staţionare începând cu un anumit rang.
În mod evident, dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir constant, cu $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci şirul este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\displaystyle\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$ şi orice funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Dacă $\{a_n | \, n \geq 1\} = \{a, b\}$ şi există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n = a$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, şi există funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - a - b$, care este strict monotonă şi verifică egalităţile $\displaystyle\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$.

.... **1p**

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale pentru care există o funcţie strict monotonă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx = \ldots = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \ldots .$$

Fie $I = \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$ pentru orice $k \geq 1$ şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pentru un $r > 0$ fixat există atunci un rang $n_r \geq 1$, astfel încât $a_n \in (a-r, a+r)$ pentru orice $n \geq n_r$. Cum f este strict monotonă, dacă $M = \max(|f(a-r)|, |f(a+r)|)$, atunci $|f(x)| < M$ pentru orice $x \in (a-r, a+r)$. Pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$p\cdot|I| = |p\cdot I| = \left|\sum_{k=1}^{p}\int_{a_{n_r+k-1}}^{a_{n_r+k}} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} f(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} |f(x)|\,dx\right| < \int_{a-r}^{a+r} |f(x)|\,dx \leq 2r\cdot M.$$

Rezultă că $0 \leq |I| < \dfrac{2Mr}{p}$, oricare ar fi $p\in\mathbb{N}^*$, astfel că $I = 0$. **2p**

Arătăm că $card(\{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}) \leq 2$. Presupunând contrariul, ar exista $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, cu $i < j < k$ astfel încât $a_i \neq a_j \neq a_k \neq a_i$. Avem că

$$\int_{a_i}^{a_j} f(x)\,dx = \sum_{l=i}^{j-1}\int_{a_l}^{a_{l+1}} f(x)\,dx = (j-i)\cdot I = 0$$

şi, de asemenea, $\int_{a_j}^{a_k} f(x)\,dx = (k-j)\cdot I = 0$, respectiv $\int_{a_i}^{a_k} f(x)\,dx = 0$. **1p**

Funcţia f fiind strict monotonă, rezultă atunci că
$f(a_i)\cdot f(a_j) < 0$, $f(a_i)\cdot f(a_k) < 0$ şi $f(a_j)\cdot f(a_k) < 0$. Dar atunci

$$(f(a_i)\cdot f(a_j)\cdot f(a_k))^2 = (f(a_i)\cdot f(a_j))\cdot(f(a_i)\cdot f(a_k))\cdot(f(a_j)\cdot f(a_k)) < 0\,,$$

ceea ce este absurd. **1p**

Contradicţia obţinută arată că presupunerea făcută este falsă, astfel că $card(\{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}) \leq 2$. Convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ implică în plus, în cazul în care şirul nu este constant, că el este staţionar începând cu un anumit rang. **1p**

Problema 4. Fie $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Definim funcţia $\tilde{f}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x f(t)\,dt & ,\ \text{dacă } x > 0, \\ f(0) & ,\ \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Arătaţi că:
a) funcţia $\tilde{f}$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0,1]$;
b) are loc egalitatea

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2\,dx.$$

Soluţie.
a) Funcţia f fiind continuă pe $[0,1]$, rezultă că funcţia $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ este derivabilă pe $[0,1]$, cu $F' = f$. Rezultă atunci că funcţia $\tilde{f}$ este derivabilă pe $(0,1]$, ca produs de funcţii derivabile.
.... **1p**
Rămâne să mai arătăm doar că $\tilde{f}$ este continuă în 0. Cum f este continuă, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, astfel că, aplicând regula lui l'Hôspital, avem:

$$\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{x'} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \tilde{f}(0)\,,$$

şi rezultă că $\tilde{f}$ este continuă în 0. .... **1p**
b) Fie $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Atunci $\tilde{f}(1) = I$. Ţinând cont de a), funcţia $G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $G(x) = x \cdot \left(\tilde{f}(x) - I\right)^2$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0,1]$. În plus avem
$G(0) = 0 = G(1)$, ... **1p**
respectiv

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \left(\tilde{f}(x) - I\right)^2 + 2x \cdot \left(\tilde{f}(x) - I\right) \cdot \tilde{f}'(x) = \\
&= \left(\tilde{f}(x) - I\right) \cdot \left(\tilde{f}(x) - I + 2x \cdot \left(\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x} \cdot f(x)\right)\right) = \\
&= \left(\tilde{f}(x) - I\right) \cdot \left(2f(x) - \tilde{f}(x) - I\right) = 2f(x) \cdot \left(\tilde{f}(x) - I\right) + I^2 - \tilde{f}^2(x) = \\
&= I^2 - 2If(x) + f^2(x) - \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2, \qquad \text{pentru orice } x \in (0,1].
\end{aligned}$$

.... **2p**
Deoarece există $\lim\limits_{x\to 0} G'(x) = (I - f(0))^2 \in \mathbb{R}$, rezultă că G este derivabilă în 0, cu $G'(0) = (I - f(0))^2$, şi G' este continuă pe $[0,1]$. Obţinem atunci:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 - \int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2\,dx = \\
&= \int_0^1 \left(f^2(x) + I^2 - 2If(x) - \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2\right)\,dx = \\
&= \int_0^1 G'(x)\,dx = G(1) - G(0) = 0\,,
\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează relaţia cerută. **2p**