

Examenul național de bacalaureat 2027
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ și numărul real a astfel încât numărul $z_3 = az_1 + iz_2$ este real. Determinați z_3 .
- 5p** 2. Se consideră funcția inversabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow (3, +\infty)$, $f(x) = 2^x + 3$. Determinați $t \in (3, +\infty)$ astfel încât $f^{-1}(t) = 0$, unde f^{-1} este inversa funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{x^2 + 2}$.
- 5p** 4. Determinați câte submulțimi nevide, cu cel mult două elemente, are mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC , cu centrul de greutate G și punctul D astfel încât $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Demonstrați că patrulaterul $CGBD$ este paralelogram.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = AC$, $A = \frac{2\pi}{3}$ și $R = 2$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC . Determinați distanța de la punctul B la dreapta AC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} -2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3x+2 & -2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(3)) = 4$.
- 5p** b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) - A(x) + 2A(y) = 2I_3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale a și b pentru care $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = aA(x) + bI_3$, pentru orice număr real x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2(x-1)(y-2) + 2$.
- 5p** a) Arătați că $3 * 4 = 10$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $a * x = x$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați tripletele (m, n, p) de numere naturale nenule, cu $m \leq n \leq p$, pentru care $m * (n * p) = 26$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x\sqrt{x}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(x-1)(x-3)}{2x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați numerele $a \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .

- 5p** c) Demonstrați că $f(x) - 4f\left(\frac{1}{4x}\right) \leq 2$, pentru orice $x \in (0,1]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - x) dx = 6$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3) e^{-x} dx = 2 - \frac{3}{e}$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x) + x^2} dx$. Demonstrați că
- $$I_n - I_{n+4} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$