Examenul național de bacalaureat 2027
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ și numărul real a astfel încât numărul $z_3 = az_1 + iz_2$ este real. Determinați z_3.

5p **2.** Se consideră funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \to (3, +\infty)$, $f(x) = 2^x + 3$. Determinați $t \in (3, +\infty)$ astfel încât $f^{-1}(t) = 0$, unde f^{-1} este inversa funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{x^2 + 2}$.

5p **4.** Determinați câte submulțimi nevide, cu cel mult două elemente, are mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, cu centrul de greutate G și punctul D astfel încât $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. Demonstrați că patrulaterul $CGBD$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = AC$, $A = \frac{2\pi}{3}$ și $R = 2$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC. Determinați distanța de la punctul B la dreapta AC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} -2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3x+2 & -2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(3)) = 4$.

5p **b)** Arătați că $A(x) \cdot A(y) - A(x) + 2A(y) = 2I_3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = aA(x) + bI_3$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2(x-1)(y-2) + 2$.

5p **a)** Arătați că $3 * 4 = 10$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $a * x = x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați tripletele (m, n, p) de numere naturale nenule, cu $m \le n \le p$, pentru care $m * (n * p) = 26$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(x-1)(x-3)}{2x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Determinați numerele $a \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)-4f\left(\frac{1}{4x}\right)\leq 2$, pentru orice $x\in(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-x\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)e^{-x}dx=2-\frac{3}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)+x^2}dx$. Demonstrați că $I_n-I_{n+4}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.